١٠



حكومەتی هەرێمی كوردستان- عێراق
وەزارەتی پەروەردە - بەڕێوەبەرایەتی گشتی پرۆگرام و چاپەمەنییەكان

بیركاری بۆ هەمووان

كتێبی خوێندكار
پۆلی دەیەمی وێژەیی

چاپی هەشتەم
٢٠١٥ ز / ٢٧١٥ كوردی / ١٤٣٦ ك

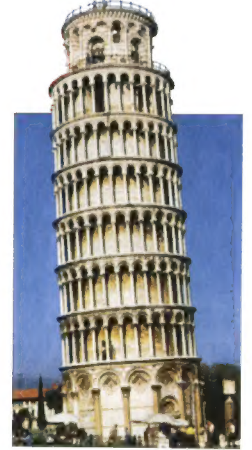
سەرپەرشتی هونەری چاپ

عوسمان پیرداود کواز

ئاری محسن احمد

ناوەڕۆکی کتێبەکە

ناوەڕۆكی كتێبەكە





بەشی 1

هاوكێشەكان Equations

پەرتووكی (الجبر و المقابلة)ی زانا محمد بن موسی الخوارزمی لە پەرتووكە بەراییەكان بوو، كە باسی جەبری كردووە. ووشەی جەبر لەو پەرتووكەوە بۆ جیهان بە جێما، كە ئێستا لە زۆربەی زمانەكانی جیهان بەكاردێت، لەگەڵ هەندێك گۆڕانی كەم لە دەربڕین. خوارزمی وشەی (الجبر)ی بەكارهێنا لە مامەڵەكردن لەگەڵ هاوكێشەكان بە مەبەستی شیكاركردنیان. جەبری هاوكێشە بەگوێرەی خوارزمی بەمانای زیادكردنی ژمارەیەك بۆ هەردوو لای هاوكێشە یان لێدەركردنی بۆ ئازادكردنی نەزانراو و دیاریكردنی بەهاكەی. خوارزمی پشتی بە زانستی جەبر بەست بۆ ئەنجامدانی لێكۆڵینەوەی زانستی لە بوارەكانی جوگرافیا و گەردووناسی.

ئەستەرلاب لە ئامرازە بەراییەكان بوو، كە زانایەكان بەكاریاندەهێنا بۆ لێكۆڵینەوە لە شوێنی ئەستێرەكان.

وانەكان

وانەی 1

دەروازەیەك بۆ هاوكێشەكان

Introduction to Equations



بۆچی

دەتوانین زۆر لە پرسیارەكانی ژیانی ڕۆژانە بە بەكارهێنانی هاوكێشەكان شیكاربكەین. هاوكێشە بە تەرازوو دەچێت، هاوكێش بوون وامان لێدەكات بە یەكسانی لەگەڵ هەردوو تایەكە (یان هەردوو لای هاوكێشەكە) مامەڵە بكەین.

ئامانجەكان

- سیفەتەكانی یەكسانبوون دەناسیت و بەكاریاندەهێنێت
- هاوكێشە هێڵییەكان بە جەبر و بە ڕوونكردنەوەیی دەنووسێت و شیكاریان دەكات

هاوكێشە Equation بریتییە لە یەكسانبوون لە نێوان دوو بڕ كە گۆڕاوێك یان زیاتر لە خۆدەگرن، پێی دەوترێت **نەزانراو Unknown**

$12x = 10$ ، هاوكێشەیەكی یەك نەزانراوە x تێدایە.

$2x - 3y = 12$ ، هاوكێشەیەكی دوو نەزانراوە كە x و y تێدایە.

هەر ژمارەیەك بە لەجیاتیدانان پاسادانی هاوكێشەكە بكات (واتا بگۆڕێت بۆ یەكسانییەكی دروست پاش دانانی ژمارەكە لەجێگای گۆڕاوەكە) پێی دەوترێت **ڕەگی Root** هاوكێشەكە.

بۆ نموونە: ژمارە $\frac{5}{6}$ بریتییە لە ڕەگی هاوكێشەی $12x = 10$ چونكە ئەگەر ئەو ژمارە لەجیاتی نەزانراوەكە دابنێین دەبێتە هۆی یەكسانبوونێكی دروست $12 \times \frac{5}{6} = 10$.

شیكاركردنی هاوكێشە بریتییە لە دۆزینەوەی كۆمەڵە ژمارەیەك كە دەبنە ڕەگەكانی هاوكێشەكە بەو كۆمەڵە دەوترێت **كۆمەڵەی شیكاری هاوكێشەكە Solution Set** ئەو كۆمەڵەیە لەوانەیە یەك دانەی تێدابێت، و لەوانەیە لە دانەیەك زیاتری تێدابێت، یان لەوانەیە ژمارەیەكی دوانەهاتوو دانەی تێدابێت، و لەوانەیە كۆمەڵەی شیكار **كۆمەڵەی بەتاڵ** $\varnothing$ **Empty Set** بێت، واتا هیچ دانەیەكی تێدانەبێت. سیفەتی یەكسانبوون لە ژمارە ڕاستییەكان و سیفەتی لە جیاتیدانان بۆ شیكاركردنی هاوكێشەكان بەكاربهێنە.

Properties of Equality سیفەتەکانی یەکسان بوون

سیفەتی وێنەدانەوە **Reflexive Property**	$a = a$
سیفەتی هاوجێبوون **Symmetric Property**	ئەگەر $a = b$ ئەوا $b = a$
سیفەتی تێپەڕبوون **Transitive Property**	ئەگەر $a = b$ وە $b = c$ ئەوا $a = c$
سیفەتی کۆکردنەوە **Addition Property**	ئەگەر $a = b$ ئەوا $a + c = b + c$
سیفەتی لێدەرکردن **Subtraction Propret**	ئەگەر $a = b$ ئەوا $a - c = b - c$
سیفەتی لێکدان **Multiplication Property**	ئەگەر $a = b$ ئەوا $ac = bc$
سیفەتی دابەشکردن **Division Property**	ئەگەر $a = b$ ئەوا $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ کاتێك $c \neq 0$

سیفەتی لەجیاتیداناان **Substitution Property**

ئەگەر $a = b$ لەجیاتیدانانی b لە a لەهەر دەستەواژەیەکی دروستدا، بە دروستی دەمینێتەوە.

شیکارکردنی هاوکێشەکان هەموو کات بە سادەکردنی بڕەکان و لابردنی هێماکانی یەکتربەستن دەستپێدەکات.

نموونـــــه 1

جێبەجێکردنەکان

پلەکانی گەرما

دوو جۆر پێوەر هەیە بۆ پلەی گەرمی: پێوەری سەدی **Celsius** و پێوەری فەهرەنهایت **Fahrenheit** پەیوەندی نێوان دوو پێوەرەکە بریتییە لە $F = \frac{9}{5}C + 32$ کاتێك F هێمای پلەی گەرمی بە پێوەری فەهرەنهایت، و C پلەی گەرمی بە پێوەری سەدی بێت.

لە بڵاوکراوەی کەشوهەوادا هاتووە، پلەی گەرمی ئەمڕۆ 86 پلە بوو بە پێوەری فەهرەنهایت.

پلەی گەرمی چەند بووە بە پێوەری سەدی؟

شیکار

$F = \frac{9}{5}C + 32$	ڕێساکە
$86 = \frac{9}{5}C + 32$	لەجیاتی F ژمارە 86 دابنێ
$86 - 32 = \frac{9}{5}C + 32 - 32$	32 دەربکە لە هەر لایەك بەبەکارهێنانی سیفەتی لێدەرکردن
$54 = \frac{9}{5}C$	سادەبکە
$\left(\frac{5}{9}\right)54 = \left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{9}{5}C\right)$	هەردوولا لە $\frac{5}{9}$ بدە بەبەکارهێنانی سیفەتی لێکدان
$30 = C$	کورتبکەوە
$C = 30$	سیفەتی هاوجێبوون بەکاربهێنە

هەوڵبدە پلەی گەرمی بە پێوەری فەهرەنهایت دەبێتە چەند؟ کاتێك بە پێوەری سەدی 35 پلە بێت.

نموونە

2 هاوکێشەی $2x+7=5x-9$ شیکاربکە.

شیکار

$2x+7=5x-9$	هاوکێشەکە
$2x+7-7=5x-9-7$	7 لە هەردوو لا دەربکە، بە بەکارهێنانی سیفەتی لێدەرکردن
$2x=5x-16$	سادەبکە
$2x-5x=5x-16-5x$	$5x$ لە هەردوو لا دەربکە، بە بەکارهێنانی سیفەتی لێدەرکردن
$-3x=-16$	سادەبکە
$\frac{-3x}{-3}=\frac{-16}{-3}$	هەردوو لا بەسەر 3− دابەشبکە بە بەکارهێنانی سیفەتی دابەشکردن
$x=\frac{16}{3}$	سادەبکە

ساغبکەوە:

$$2\times\frac{16}{3}+7\overset{?}{=}5\times\frac{16}{3}-9$$

$$\frac{32+21}{3}\overset{?}{=}\frac{80-27}{3}$$

$$\frac{53}{3}=\frac{53}{3}$$

کەواتە، $x=\frac{16}{3}$ ڕەگی هاوکێشەکەیە

هەوڵبدە هاوکێشەی $3x+12=-5x+24$ شیکاربکە، شیکارەکە بە لەجیاتیدانان ساغبکەوە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

ئەو سیفەتانە دیاربکە کە لە شیکارکردنی ئەم هاوکێشانە بەکاریدەهێنیت.

1 $52=-2.7x-3$ 2 $x+2.2=\frac{x}{5}$ 3 $3x-5=2x-2$

4 ڕوونی بکەوە، چۆن هاوکێشەیەکی هاوتای هاوکێشەی $4x-7=4$ بەدەستدەهێنێت.

لەبیرت بێت

دوو هاوکێشە هاوتا دەبن ئەگەر هەمان ڕەگەکانیان هەبێت

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە و شیکارەکان ساغبکەوە بکە.

5 $4x+12=20$ 6 $\frac{x}{5}+3=4$

7 $-\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}=2-3x$ 8 $7-6x=2x-9$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.

9 $2x-5=1$

10 $-2x-7=9$

11 $5x-3=12$

12 $20=6x-10$

13 $4-5x=19$

14 $3x+1=\frac{1}{2}$

15 $4x+80=-6x$

16 $7x=-2x+5$

17 $5x+3=2x+18$

18 $4x-3=x+7$

19 $\frac{1}{5}x+3=2$

20 $\frac{1}{4}x-\frac{5}{2}=-2$

21 $\frac{1}{2}x+2=0$

22 $\frac{1}{3}x=-x+4$

23 $x-5=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

24 $-\frac{1}{3}x+1=\frac{3}{2}x-1$

25 $\frac{2}{3}x+9=\frac{1}{2}x-4$

26 $\frac{1}{4}x-3=6x$

27 $\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}x-1$

28 $\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}=x-3$

ئەم هاوکێشانە بە بەکارهێنانی بژمێر شیکاربکە، شیکارەکە بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

29 $0.24x+1.1=2.56x-1.5$

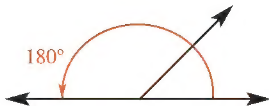
30 $1.05x-4.28=-2.65x+4.1$

31 $0.67x-8.75=-0.48x+3.99$

32 $5.9(0.33x-1.33)=1.03x-5.72$

بەستنەوە

33 **ئەندازە** پێوانەی یەکێك لە دوو گۆشەی پڕکەر دەکاتە دوو ئەوەندەی پێوانەی گۆشەکەیتر و 45 پلەی بۆ زیادکرابێت. هاوکێشەیەك بنووسە و بەکاریبهێنە بۆ دۆزینەوەی پێوانەی دوو گۆشەکە.



جێبەجێکردنەکان

هاوکێشەی گونجاو بۆ ئەمانەی خوارەوە بنووسە پاشان شیکاریانبکە.

34 **بۆ خۆشی** نرخی بلیتی چوونە ژوورەوەی شاری یاری 6000 دینارە، نرخی بەشداریکردن لەهەر یارییەك 1500 دینارە. ئەگەر 30 000 دینارت پێبێت، لە چەند یاری دەتوانیت بەشداری بکەیت؟

35 **ئابووری** ژوان بە 1 750 000 دینار کۆمپیوتەرێکی نوێی کڕی. ئەم کۆمپیوتەرە ساڵانە 250 000 دینار نرخەکەی کەم دەکات. پاش چەند ساڵ نرخەکەی دەبێتە سفر؟

36 **دەرامەت** ئارام دوو خستنەڕووی کاری بۆ هات لە کۆگای فرۆشتنی جلوبەرگ.

- یەکەمیان: 600 هەزار دینار مانگانە لەگەڵ 10 هەزار دینار بۆ هەر کاڵایەك کە دەیفرۆشێت
- دووەمیان: 800هەزار دینار مانگانە لەگەڵ 8هەزار دیناری بۆ هەر کاڵایەك کە دەیفرۆشێت

ژمارەی ئەو کاڵایانەی پێویستە ئارام بیفرۆشێت چەندە، بۆ ئەوەی لە هەردوو خستنەڕووەکە هەمان دەستکەوتی هەبێت؟

37 **داهاتی** کارگەیەك کارێکی بە شارا سپارد بەرامبەر 60 هەزار دینار لە هەفتەیەکدا، بۆ هەر کاتژمێرێکی کارکردن 7500 دینار دەخرێتە سەر هەفتانەکەی. پێویستە شارا چەند کاتژمێر کاربکات بۆ ئەوەی لە کۆتایی هەفتە کراسێك بە 120 هەزار دینار بکڕێت؟

ڕوانین بۆ دواوە

ئەم برانە هەژماربکە.

38 $3(2-(5-3)-7)+2$

39 $-(-5^2)^3$

ڕوانین بۆ پێشەوە

ئەم دەستەواژە بیرکارییانە چیدەگەیەنێت؟ باسیبکە.

40 $y>-5$

41 $-3<x<3$

42 $-1\le y\le 1$

43 $x\ge -3$



شیتەڵکردنی بڕە جەبرییە دووجاکان

Factoring Algebraic Quadratic Expressions

ئامانجەکان

- بڕە جەبرییە دووجاکان شیتەڵدەکات.
- بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا شیکارکردن بەکاردەهێنێت.



بۆچی

بڕە جەبرییە دووجاکان بۆ وەسفکردنی زۆر نموونەی ژیانی ڕۆژانەمان بەکاردێت وەك شێوازی حەوزی ئەم وێنەیە

جێبەجێکردنەکان

ئەندازەی تەلارسازی

ئەندازیارێکی تەلارسازی حەوزێکی لە باخچەی گشتی دروستکرد، وەك لە وێنەی سەرەوە دەردەکەوێت. لەناو حەوزەکەدا چەند خشتەکێکی هاوشێوە لە شێوەی نیشانەی لێکدان × ڕیزکرد بەچەند ئاستێکی جیاواز، بە جۆرێك کە ژمارەی خشتەکەکانی هەر لایەکی شێوە هێماکە یەکی کەمتر بێت لەو لایەی دەکەوێتە ژێرخۆی. ڕێسای $m = 2n^2 - n$ هەژماری خشتەکەکانی m مان بۆ دەکات بۆ درووستکردنی حەوزێك لە n ئاستدا. ژمارەی ئاستەکانی ئاوی حەوزێك چەندە کە 66 خشتەکی تێدابێت.

شیتەڵکردنی بڕە جەبرییە دووجاکان Factoring Algebraic Quadratic Expressions

لێکدان

$$2x^2 + 6x = 2x(x+3)$$

شیتەڵکردن

لەو کاتەی فێری لێکدانی دوو بڕی جەبری وەك $x+3$ ، $2x$بوویت، ئەنجامی لێکدانی دوو بڕەکەت دەگۆڕیێ بۆ سەرجەمی کۆمەڵێك ڕادە. شیتەڵکردن **Factoring** کرداری پێچەوانەی لێکدانە و شیتەڵکردن سەرجەمی چەند ڕادەیەکت بۆ دەگۆڕێت بۆ ئەنجامی لێکدان.

بۆ ئەوەی بڕێکی دووانی یان زیاتر شیتەڵبکەیت، گەورەترین کۆڵکەی هاوبەش (گ.ك.ه) بۆ دوو ڕادەکە دەربێنە ئەگەر هەبوو **Greatest Common Factor (GCF)** ، وەك لەم نموونەدا دیاردەکەوێت.

نموونــــه

1 ئەم برە دووجایانە شیتەڵبکە.

أ $3m^2 - 12m$

ب $3x(4x+5) - 5(4x+5)$

شیکار

گەورەترین کۆڵکەی هاوبەش دەربهێنە.

أ $3m^2 - 12m = 3m \times (m) - 3m \times (4)$

گەورەترین کۆڵکەی هاوبەش بریتییە لە $3m$

$3m^2 - 12m = 3m \times (m) - 3m \times (4)$

$= 3m(m-4)$

ب $3x(4x+5) - 5(4x+5)$

گەورەترین کۆڵکەی هاوبەش بریتییە لە $(4x+5)$

$3x(4x+5) - 5(4x+5)$

$= (4x+5)(3x-5)$

هەوڵبدە ئەم دوو برە $5x^2 + 15x$ ، $4(2x-1) + (2x-1)x$ شیتەڵبکە.

شێوەی گشتی بڕی دووجا بریتییە لە $ax^2 + bx + c$ کاتێک $a \neq 0$

دەتوانیت زۆر لە برە جەبرییە دووجاکان شیتەڵبکەیت. سەرنجی شیتەڵکردنی ئەم برانەی خوارەوە بدە کاتێک $a = 1$.

شیکارکردنی پرسیارەکان بەدوای شێوازێکدا بگەڕێ سەیری شێوەی شیتەڵکردنی ئەم برە دووجایانە بکە. سەرنجبدە کە کۆی دوو ڕادە نەگۆڕەکە لە کۆڵکەکاندا یەکسانە بە هاوکۆڵکەی x لە برە دووجاکەدا بەر لەشیتەڵکردنیان و ئەنجامی لێکدانیان یەکسانە بە ڕادە نەگۆڕەکە.

$x^2 + 7x + 10 = (x+5)(x+2)$ — $5+2=7$ ، $5 \times 2 = 10$

$x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-2)$ — $(-5)+(-2)=-7$ ، $(-5)\times(-2)=10$

$x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$ — $5+(-2)=3$ ، $5\times(-2)=-10$

$x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$ — $(-5)+2=-3$ ، $(-5)\times(2)=-10$

بە لێکۆڵینەوە لە شێوازەکانی پێشوو ڕێسایەکمان بۆ شیتەڵکردنی بڕی $x^2 + bx + c$ دەستدەکەوێت.

بۆ ئەوەی بڕی $x^2 + bx + c$ شیتەڵبکەیت، کاتێک b ، c دوو ژمارەی تەواوین، لە دوو ژمارەی تەواوی r و s بگەڕێ کە سەرجەمیان b بێت و ئەنجامی لێکدانیان c بێت، پاشان برەکە بەم شێوەیە شیتەڵبکە $x^2 + bx + c = (x+r)(x+s)$.

کاتێک c ژمارەیەکی موجەب بێت، شیتەڵبیکە بۆ ئەنجامی لێکدانی دوو ژمارەکە هەمان نیشانەیان هەبێت، وەك نیشانەی ڕادەی دووەم.

نموونە

2 بڕی x^2+5x+6 شیتەڵبکە.

شیکارکردنی پرسیارەکان

شیکار

بخەملێنە و ساغبکەوە دەست بە نووسینی $(x \quad)(x \quad)$ بکە. بەدوای دوو کۆڵکەی ژمارە 6 بگەڕێ کە هەمان نیشانەیان هەبێت و سەرجەمیان 5 بێت.

$(x+1)(x+6)$	$(x+2)(x+3)$	$(x-1)(x-6)$	$(x-2)(x-3)$
$1\times x+6x$	$2x+3x$	$(-1)x+(-6)x$	$(-2)x+(-3)x$
$\stackrel{?}{=}$	$\stackrel{?}{=}$	$\stackrel{?}{=}$	$\stackrel{?}{=}$
$5x$	$5x$	$5x$	$5x$
هەڵەیە	دروستە	هەڵەیە	هەڵەیە

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

تێبینیبکە: لە کاتی شیتەڵکردنی x^2-5x+6 هەروەك پێشتر دەبینین کە $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

هەوڵبدە بڕی $x^2-10x-11$ شیتەڵبکە.

کاتێك c ژمارەیەکی سالب بێت لە x^2+bx+c بەدوای دوو کۆڵکە جیاواز لەنیشاندا بگەڕێ.

نموونە

3 بڕی $\mathbf{x^2-7x-30}$ شیتەڵبکە.

شیکارکردنی پرسیارەکان

شیکار

بخەملێنە و ساغبکەوە دەست بە نووسینی $(x \quad)(x \quad)$ بکە. بەدوای دووکۆڵگە لە کۆڵگەکانی ژمارە(30−)دا بگەڕێ، سەرجەمیان بکاتە 7− ئاگاداربە دوو کۆڵگەکە دەبێ لە نیشانەدا جیاواز بن.

$(x-1)(x+30)$	$(x+1)(x-30)$	$(x-2)(x+15)$
$(-1)x+30x$	$1x+(-30)x$	$(-2)x+15x$
$\stackrel{?}{=}$	$\stackrel{?}{=}$	$\stackrel{?}{=}$
$-7x$	$-7x$	$-7x$
هەڵەیە	هەڵەیە	هەڵەیە
$(x+2)(x-15)$	$(x-3)+(x+10)$	$(x+3)(x-10)$
$2x+(-15)x$	$(-3)x+10x$	$3\times x+(-10)x$
$\stackrel{?}{=}$	$\stackrel{?}{=}$	$\stackrel{?}{=}$
$-7x$	$-7x$	$-7x$
هەڵەیە	هەڵەیە	دروستە

کەواتە $x^2-7x-30=(x+3)(x-10)$

هەوڵبدە بڕی $3x^2+11x-20$ شیتەڵبکە.

نموونە 4

بڕی $8x^2 + 2x - 15$ شیتەڵبکە.

شیکار

$$8x^2 + 2x - 15 = (2x+3)(4x-5)$$

$+12x$

$-10x$

$-10x + 12x = 2x$ ڕادە دووجاکە شیتەڵبکە بۆ دوو کۆڵکەی $\left(8x^2 = (2x)\times(4x)\right)$ و ڕادە نەگۆڕەکەش بۆ دوو کۆڵکەی $\left(-15 = (3)(-5)\right)$ و پاسادانی ڕادە هێلیەکە بکە.

نموونە 5

ئەم برانە شیتەڵبکە.

أ $6x^2 - 5x - 1$

ب $3x^2 + 11x - 20$

ج $3x^2 - 11x - 20$

د $8x + 6x^2 - 30$

شیکار

أ $6x^2 - 5x - 1 = (6x+1)(x-1)$

ب $3x^2 + 11x - 20 = (3x-4)(x+5)$

ج $3x^2 - 11x - 20 = (3x+4)(x-5)$

د $8x + 6x^2 - 30 = 6x^2 + 8x - 30$
$= 2(3x^2 + 4x - 15)$
$= 2(3x-5)(x+3)$

لەمەر شیتەڵکردنێک یەکەم هەنگاو گەورەترین کۆڵکەی هاوبەش دەربهێنە بەر لە شیتەڵکردن.

هەوڵبدە

بڕی $3x^2 + 9x - 30$ شیتەڵبکە.

- لەئەنجامی لێکدانی دوو بڕی $x+3$ ، $x-3$ ووردببەوە.

جیاوازی نێوان دوو دووجا

$$(x+3)(x-3) = x^2 + 3x - 3x - 9 = x^2 - 9 = x^2 - 3^2$$

شیتەڵکردنی جیاوازی نێوان دوو دووجا Factoring The Difference Of The Squares

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

بۆ نموونە: $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$

لە ئەنجامی دووجاکردنی هەریەکە لە $x+3$ و $x-3$ ووردببەوە.

$(x+3)^2 = (x+3)(x+3)$
$= x^2 + 3x + 3x + 9$
$= x^2 + 6x + 9$
$= x^2 + 2\times 3\times x + 3^2$

$(x-3)^2 = (x-3)(x-3)$
$= x^2 - 3x - 3x + 9$
$= x^2 - 6x + 9$
$= x^2 - 2\times 3\times x + 3^2$

دووجای تەواو

شیتەڵکردنی دووجای تەواو Factoring Perfect Squares

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ $\qquad$ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

سەرنجبدە $x^2+6x+9=(x+3)^2$ و $x^2-6x+9=(x-3)^2$

نموونە 6

ئەم برانە شیتەڵ بکە.

أ x^4-16 $\qquad$ ب $4x^2-24x+36$

شیکار

أ $x^4-16=(x^2+4)(x^2-4)$

$=(x^2+4)(x+2)(x-2)$

ب $4x^2-24x+36=4(x^2-6x+9)$

$=4\left[x^2-2\times3\times x+3^2\right]$

$=4(x-3)^2$

هەوڵبدە ئەم برانە شیتەڵبکە $9x^2-49$ و $3x^2-6x+3$.

شیکارکردنی هاوکێشە دووجاکان بە شیتەڵکردن
Using Factoring to Solve Quadratic equations

هەندێك جار دەتوانیت شیتەڵکردن بۆ شیکارکردنی هاوکێشەکان بەکاربهێنیت.

سیفەتی لێکدانی سفری Zero Product Property

ئەگەر $p\times q=0$ ئەوا $p=0$ یان $q=0$

شێوەی گشتی هاوکێشەی دووجا بەم جۆرە دەنووسرێت $ax^2+bx+c=0$ ئەگەر توانیت بڕی ax^2+bx+c شیتەڵبکەیت، ئەوا دەتوانیت هاوکێشەکە بە جێبەجێکردنی سیفەتی سفری شیکاربکەیت. چۆن لێکدانی سفری جێبەجێ دەکەیت؟ بڕەکە شیتەڵبکە و ئەنجامی لێکدانیان یەکسان بکە بە 0 .

نموونە 7

هاوکێشەی $x^2+6x=-5$ شیکاربکە.

شیکار

لەسەرەتادا هاوکێشەکە لەسەر شێوەی گشتی بنووسە $x^2+6x+5=0$ بڕی x^2+6x+5 شیتەڵبکە $x^2+6x+5=(x+5)(x+1)$ دەستدەکەوێت پاشان $(x+5)(x+1)=0$ بنووسە (یەکسان بکە بە سفر) چۆن ڕەگەکانی هاوکێشەی $(x+5)(x+1)=0$ دیاری دەکەیت؟
بە بەکارهێنانی سیفەتی سفری، دوا هاوکێشە ئەم دوو هاوکێشەمان دەداتێ $(x+5)=0$ یان $(x+1)=0$ کەواتە $x=-5$ یان $x=-1$ واتا -5 یان -1 دوو ڕەگی هاوکێشەکەن.

نـــــمـــوونـــــه

8 سیفەتی لێکدانی سفری بۆ شیکارکردنی ئەم هاوکێشانە بەکاربهێنە.

أ $2x^2 - 11x = 0$ ب $x^2 - 14x + 45 = 0$

شیکار

أ
$2x^2 - 11x = 0$
$x(2x - 11) = 0$
$x = 0$ یان $2x - 11 = 0$
$x = 0$ $x = \frac{11}{2}$

ب
$x^2 - 14x + 45 = 0$
$(x - 5)(x - 9) = 0$
$x - 5 = 0$ یان $x - 9 = 0$
$x = 5$ $x = 9$

هەوڵبدە سیفەتی لێکدانی سفری بۆ شیکارکردنی ئەم هاوکێشانە بەکاربهێنە.

أ $3x^2 + 12x = 0$ ب $x^2 + 4x - 21 = 0$

بیری ڕەخنەگر بسەلمێنە کە هاوکێشەی $ax^2 + bx = 0$ کاتێك $a \neq 0$ دوو ڕەگی هەیە کە بریتین لە 0، $-\frac{b}{a}$.

نـــــمـــوونـــــه

9 بەگەڕانەوە بۆ نموونەی حەوزەکەی لە سەرەتای وانەکەدا باسکرا، ژمارەی ئاستەکانی حەوزەکە چەندە؟ کاتێك ژمارەی خشتەکان 66 بێت؟

شیکار

هاوکێشەی $2n^2 - n = 66$ شیکاربکە. — هاوکێشەکە بەشێوەی گشتی بنووسە
$2n^2 - n - 66 = 0$ — بڕی $2n^2 - n - 66 = 0$ شیتەڵبکە.
$(2n + 11)(n - 6) = 0$ — سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربهێنە
$n - 6 = 0$ یان $2n + 11 = 0$

$n = -5.5$ فەرامۆش دەکرێت چونکە ژمارەی ئاستەکان نابێ سالب بێت کەواتە $n = 6$ ڕاستە.

ڕاهێـــــنـــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن m و n دەدۆزیتەوە ئەگەر $x^2 + 34x + 285 = (x + m)(x + n)$ ؟

2 چی دەزانی دەربارەی شیتەڵکردنی بڕە دووجای $x^2 + bx + c$ کاتێك c موجەب بێت؟ کاتێك c سالب بێت؟ نیشانەی b چ زانیارییەکت پێ دەبەخشێت لە هەریەکە لەو بارانەدا.

3 چی دەتوانیت بڵێیت دەربارەی b و c ئەگەر ئەنجامی لێکدانیان سفربێت $(bc = 0)$ ؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم بڕە دووجایانە شیتەڵبکە.

4 $2x^2 - 8x$ 5 $2x^2 - 6x$

6 $5x^2 - 15x$ 7 $4x(x + 3) - 7(x + 3)$

8 $3(4b + 7) - 2b(4b + 7)$ 9 $8d(9d - 5) + 3(9d - 5)$

10 x^2+5x+6

11 x^2+8x+7

12 x^2-5x+4

13 $x^2-4x-12$

14 $x^2-9x-36$

15 $x^2+10x-24$

16 $2x^2+9x+10$

17 $3x^2+5x+2$

18 $5x^2+13x-6$

19 $8x^2+24x-14x-42$

20 $12x^2+21x-8x-14$

21 $72x^2-56x-36x+28$

22 x^2-81

23 $2x^2-8$

24 $16x^2-25$

25 $x^2+8x+16$

سیفەتی لێکدانی سفری بۆ شیکارکردنی ئەم هاوکێشانە بەکاربهێنە.

26 $x^2+7x=0$

27 $x^2+6x+9=0$

28 $x^2+3x-10=0$

29 ئەندازە ئازاد چەند خاڵێکی بە 36 پارچە ڕاستەهێڵ بەیەکگەیاند. ژمارەی خاڵەکان چەندن؟ ئەگەر بزانیت گەیاندنی n خاڵ پێویستی بە $\frac{n(n-1)}{2}$ پارچە ڕاستەهێڵ هەیە؟

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەم برانە شیتەڵبکە.

30 $3x+6$

31 $3x^2+18$

32 $10n-n^2$

33 $x-4x^2$

34 $6x-2x^2$

35 $3x^2-15x$

36 $5x(x-2)-3(x-2)$

37 $(x+3)(2x)+(x+3)7$

ئەم برانە شیتەڵبکە.

38 $x^2-16x+15$

39 $x^2+8x+16$

40 $x^2-26x+48$

41 $x^2+4x-32$

42 $x^2+7x-30$

43 $x^2-10x-24$

44 $-22x-48+x^2$

45 $2x-x^2-24$

46 $x^2-56-10x$

47 $56+10x-x^2$

48 $30+x-x^2$

49 $24+10x-x^2$

50 $3x^2+10x+3$

51 $2x^2+5x+2$

52 $2x^2+3x+1$

53 $3x^2+7x+2$

54 $12x^2-3x-9$

55 $3x^2-5x-2$

شیتەڵکردن و سیفەتی لێکدانی سفری بۆ شیکارکردنی ئەم هاوکێشانە بەکاربهێنە.

56 $15x^2 = 7x + 2$

57 $3x^2 - 5x = 2$

58 $4x - 4 = -15x^2$

59 $3x^2 + 3 = 10x$

60 $2x^2 - 15 = -7x$

61 $6x^2 - 17x = -12$

62 $x^2 - 36 = 0$

63 $t^2 - 9 = 0$

64 $x^4 - 81 = 0$

65 $x^4 - 1 = 0$

66 $4x^2 - 9 = 0$

67 $25x^2 - 16 = 0$

68 $x^2 - 2x + 1 = 0$

69 $x^2 + 4x + 4 = 0$

70 $9x^2 = -6x - 1$

71 $4x^2 + 1 = 4x$

72 $-4 + 20x - 25x^2 = 0$

73 $40x + 25 = -16x^2$

74 $64 + 16x + x^2 = 0$

75 $9 - 6x + x^2 = 0$

شیتەڵکردن و سیفەتی لێکدانی سفری بۆ شیکارکردنی ئەم هاوکێشانە بەکاربهێنە.

76 $x^2 - 7x + 10 = 0$

77 $t^2 - 2t - 15 = 0$

78 $4x^2 + 4x - 24 = 0$

79 $6x^2 + 3x - 9 = 0$

80 $t^2 + 7t - 60 = 0$

81 $x^2 - 15x + 56 = 0$

82 $x^2 + 8x + 12 = 0$

83 $x^2 - 3x - 40 = 0$

84 $6x^2 + 20x - 16 = 0$

85 $4x^2 - 8x + 3 = 0$

بەرەنگاری

ئەم برانە شیتەڵبکە.

86 $(a+b)^4 - (a-b)^4$

87 $x^{2n} - 1$

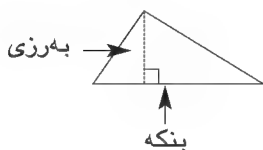
88 $x^{2n} - 2x^n + 1$

بەستنەوە

ئەندازە ڕێسای هەژمارکردنی ڕووبەری سێگۆشە بریتییە لە $A = \frac{1}{2}bh$، کە A ڕووبەر و b درێژی بنکە و h بەرزی بێت. ئەم زانیارییە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانی 89 و 90 .

89 بەرزی ئەو سێگۆشەیە بدۆزەرەوە کە ڕووبەرەکەی $42\ cm^2$ و بنکەکەی 5 cm زیاترە لە بەرزییەکەی.

90 درێژی بنکەی ئەو سێگۆشەیە بدۆزەوە کە ڕووبەرەکەی $12\ cm^2$ و بەرزییەکەی 5 cm کەمترە لە درێژی بنکەکەی.



ڕوانینێك بۆ دواوە

هەر لاسەنگەیەك شیكاربكە و كۆمەڵەی شیكار لەسەر هێڵی ژمارەكان بنووسە.

91 $2x - 4 > 12 + 5x$

92 $2x - \frac{3}{4} \geq 7$

93 $3(3x+7)-12 \le 8-(\frac{1}{2}x+9)$

94 $-2(\frac{2}{3}x+5)-13<0$

لێکیان بدە.

95 $(3x+4)(-x-5)$

96 $(-2x+9)(-4x+7)$

97 $(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4})(-5x-2)$



ڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەگەر کرا ئەم برە دووجایانە شیتەڵبکە.

98 $(x+2)^2-4$

99 $(x+9)^2+36$

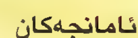
100 $(x-1)^2-16$

وانەی 3

شیکارکردنی هاوکێشە دووجاکان بە یاسا

Solving Quadratic Equation By Formula

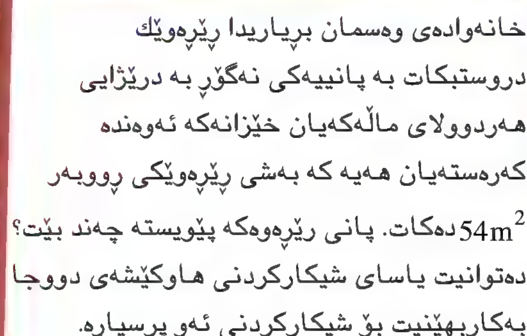
بۆچی
دەتوانین بە بەکارهێنانی یاسای شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا زۆر کێشەی ژیانی ڕۆژانە شیکاربکەین وەك دۆزینەوەی دوورییەکانی ڕێڕەوەی خانوویەك



ئامانجەکان

- بۆ دۆزینەوەی ڕەگە ڕاستییەکانی هاوکێشەیەکی دووجا یاسا بەکاردەهێنین.

جێبەجێکردنەکان
بیناسازی



خانەوادەی وەسمان بڕیاریدا ڕێڕەوێك دروستبکات بە پانییەکی نەگۆڕ بە درێژایی هەردوولای ماڵەکەیان خێزانەکە ئەوەندە کەرەستەیان هەیە کە بەشی ڕێڕەوێکی ڕووبەر $54m^2$ دەکات. پانی ڕێڕەوەکە پێویستە چەند بێت؟ دەتوانیت یاسای شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا بەکاربهێنیت بۆ شیکارکردنی ئەو پرسیارە.

زانایانی بیرکاری یاسایەکیان دانا، بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا لەسەر شێوەی گشتی $ax^2+bx+c=0$ ئەم یاسایە بڕێکی گرنگ بەکاردەهێنێت ناویاننا جیاکەرەوە.

جیاکەرەوە Discriminant

بەبڕی $\Delta=b^2-4ac$ دەوترێت بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەی دووجا $ax^2+bx+c=0$ کاتێك $a\neq 0$.

شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا بە یاسا

جیاکەرەوە	ژمارەی ڕەگەکان لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان
$\Delta > 0$	هاوکێشەکە دوو ڕەگی ڕاستی جیاوازی هەیە کە بریتیین لە: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$\Delta = 0$	هاوکێشەکە دوو ڕەگی ڕاستی یەکسانی هەیە. $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	هاوکێشەکە ڕەگی ڕاستی نییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان.

نموونە 1 یاسا بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $x^2 + 5x - 14 = 0$

شیکار

ئەگەر $x^2 + 5x - 14 = 0$ لەگەڵ شێوەی گشتی هاوکێشەی دووجا $ax^2 + bx + c = 0$ بەراوردبکەین دەبینین $a = 1$ و $b = 5$ و $c = -14$.

هاوکێشەکە بەم شێوەیە شیکاربکە:

.1 جیاکەرەوە هەژماربکە بە لە جیاتیدانانی بەهاکان لە $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times (-14) = 25 + 56 = 81$$

.2 لەبەرئەوەی جیاکەرەوە موجەبە، هاوکێشەکە دوو ڕەگی ڕاستی جیاوازی هەیە کە بریتین لە:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad ، \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-5+\sqrt{81}}{2} \quad ، \quad = \frac{-5-\sqrt{81}}{2}$$

$$= 2 \quad ، \quad = -7$$

هەوڵبدە یاسا بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $x^2 - 7x + 6 = 0$

خاڵی چاودێری ✓ هاوکێشەی $x^2 + 5x - 14 = 0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە، بۆ ساغکردنەوەی دروستی وەڵامی نموونەی **1**.

نموونە 2 یاسا بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $4x^2 = 8 - 3x$ دوو ڕەگەکە بە تەواوی بنووسە پاشان بۆ نزیکترین بەش لە دەیەک نزیکیانبکەوە.

شیکار

شێوەی گشتی هاوکێشەکە بریتییە لە: $4x^2 + 3x - 8 = 0$ کە هاوکۆلکەکانی بریتین لە: $a = 4$ و $b = 3$ و $c = -8$.

جیاکەرەوە هەژماربکە بە لەجیاتیدانان $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times4(-8) = 9+128 = 137$

لەبەرئەوەی جیاکەرەوە موجەبە، هاوکێشەکە دوو ڕەگی ڕاستی جیاوازی هەیە کە ئەمانەن:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad ، \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-3+\sqrt{137}}{8} \quad ، \quad = \frac{-3-\sqrt{137}}{8}$$

$$\approx 1.1 \quad ، \quad \approx -1.8$$

هەوڵبدە یاسا بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $2x^2 - 6x = -3$ دوو ڕەگەکە بە تەواوی بنووسە پاشان بۆ نزیکترین بەش لە دەیەك نزیکیانبکەوە.

نموونە 3 یاسا بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $x^2 - 3x + 6 = 0$.

شیکار

هاوکۆڵکەکان بریتیین لە $a = 1$ و $b = -3$ و $c = 6$.

جیاکەرەوە کە هەژماربکە. $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times1\times6 = 9 - 24 = -15$

لەبەر ئەوەی جیاکەرەوە سالیبە بۆیە هاوکێشەکە ڕەگی نییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان

هەوڵبدە ئەم هاوکێشەیە $4x + 2 = -3x^2$ شیکاربکە.

نموونە 4 ئەم هاوکێشەیە $3x^2 + 12 = 12x$ شیکاربکە.

شیکار

هاوکێشەکە بەشێوەی گشتی بنووسە: $3x^2 - 12x + 12 = 0$

جیاکەرەوەکە هەژماربکە. $\Delta = (-12)^2 - 4\times3\times12 = 144 - 144 = 0$

لەبەرئەوەی $\Delta = 0$ هاوکێشەکە دوو ڕەگی ڕاستی یەکسانی هەیە کە ئەمانەن:

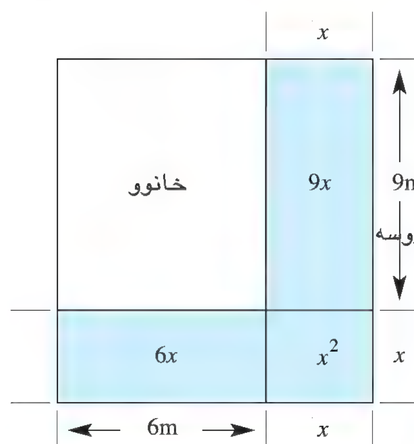
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{6} = 2$$

هەوڵبدە ئەم هاوکێشەیە $x^2 - 14x = 49$ شیکاربکە.

نموونە

5 بەگەڕانەوە بۆ سەرەتای وانەکە، پانی ڕێڕەوەکە دیاریبکە ئەگەر زانیت خێزانی وەسمان ئەوەندە کەرەستەی هەیە کە بەشی 54 مەتر دووجا بکات.

جێبەجێکردنەکان



شیکار

ئەو بڕەی ڕووبەری ڕاڕەوەکە دەنوێنێت بریتییە لە

داواکراو: شیکارکردنی $A(x) = x^2 + 9x + 6x = x^2 + 15x$

هاوکێشەی $x^2 + 15x = 54$ هاوکێشەکە بەشێوەی گشتی بنووسە

و هاوکۆلگەکانی دیاریبکە $a = 1$ و $b = 15$ و $c = -54$

جیاکەرەوەی ئەم هاوکێشەیە هەژماربکە:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 225 - 4 \times 1 \times (-54) = 441$$

لەبەرئەوەی جیاکەرەوەکە موجەبە، هاوکێشەکە دوو ڕەگی ڕاستی جیاوازی هەیە کە ئەمانەن:

$$x_1 = \frac{-15+\sqrt{441}}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{-15-\sqrt{441}}{2} = -18$$

وەلامەکە 3 یە چونکە ڕەگی -18 بەجێنیە، چونکە پانی ڕاڕەو نابێت ژمارەیەکی سالب بێت.

هەولبدە پانی ڕاڕەوەکە دیاریبکە ئەگەر کەرەستەکە بەشی 34 مەتر دووجا بکات.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن یاسای شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا بەکاردێنێت بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $x^2 + 2x - 3 = 0$ ڕوونیبکەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

یاسا بۆ دیاریکردنی هەردوو ڕەگی ئەم هاوکێشانە بەکاربهێنە.

2 $x^2 - 5x + 4 = 0$

3 $2x^2 - 5x = 3$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

یاسا بۆ شیکارکردنی ئەم هاوکێشە دووجایانە بەکاربهێنە، شیکارەکان بە تەواوی بنووسە (بەبێ نزیککردنەوە).

4 $x^2 + 7x + 9 = 0$

5 $x^2 + 6x = 0$

6 $(x+1)(x-2) = 5$

7 $(x-4)(x+5) = 7$

8 $t^2 - 9t + 5 = 0$

9 $x^2 - 3x - 1 = 0$

10 $x^2 + 9x - 2 = -16$

11 $x^2 - 5x - 6 = 18$

12 $5x^2 + 16x - 6 = 3$

13 $4x^2 = -8x - 3$

14 $3x^2-3=-5x-1$

15 $x^2+3x=2-2x$

16 $x^2+6x+5=0$

17 $x^2+10x=5$

18 $-2x^2+4x=-2$

19 $5x^2-2x-3=0$

20 $-6x^2+3x+19=0$

21 $-x^2-3x+1=0$



ڕوانینێك بۆدواوە

شیتەڵکردن وسیفەتی لێکدانی سفری لە شیکاکردنی ئەم هاوکێشانە بەکاربهێنە.

22 $x^2-9x=0$

23 $4x^2=64$

24 $4x^2-4x+1=0^{25}$

25 $x^2-3x+10=0$



ڕوانینێك بۆ پێشەوە

26 ئایا دەتوانیت لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان شیکارێك بدۆزیتەوە بۆ هاوکێشە دووجای $2x^2+5x+6=0$؟ ئەمە بە پشتبەستن بە یاسای شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا ڕوونبکەوە.

بەشی 2

هێزەکان و ڕەگەکان

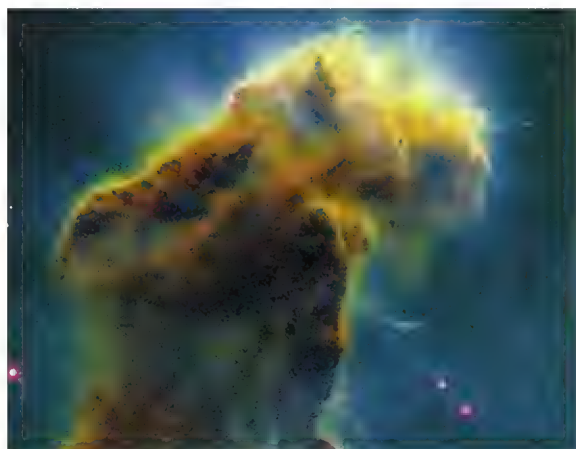
Powers and Radicals

مرۆڤ هەر لە زووەوە هێزەکان و ڕەگەکانی ناسیوەتەوە، لەسەرەتادا تەنها هێزی ژمارەی تەواوی توان تەواوی موجەبی ناسی بە هۆی لێکدان و ڕەگەکانیش تەنها ڕەگی دووجا بوون پاشان ڕەگی سێجا: مرۆڤ تووشی ئاستەنگی گەورە بوو لەکاتی لێکدانی هێزەکان و ڕەگەکان. لەگەڵ پێشکەوتنی کەشتییەوانی و گەردووونناسی، پێویستی بە جێبەجێکردنی کرداری ئالۆزی بیرکاری توانی تێدابێت زۆرتر بوو. زانایانی بیرکاری بەکارێکی سەخت هەڵسان بۆ گۆڕینی کرداری لێکدان بۆ کرداری کۆکردنەوەی خێرا. لەو کارە سەرکەوتوو بوون بە هۆی بەکارهێنانی چەمکی لۆگاریتم.

وانەکان



هێزەکان Powers



بۆچی
زانایانی گەردوونناسی هێزەکانیان بەکارهێناوە بۆ دەربڕینی گەورە دوورییەکان وەك دووری نێوان زەوی و ئەمە ئەستێرەی باز (نموونە 5)

ئامانجەکان

- بە سادەترین شێوە ئەو برانەی هێزیان تێدایە دەنووسێت.
- شێوەی زانستی ژمارەکان بەکاردەهێنێت.

هێزەکان ئەو برانەن بەشێوەی a^n دەنووسرێن، کاتێك a ژمارەیەکی ڕاستی بێت جگەلە سفر، وپێی دەوترێت بنچینەی هێزەکە و n ژمارەیەکی تەواوە و پێی دەوترێت توانی هێزەکە.
کاتێك n ژمارەیەکی تەواوی موجەب بێت، ئەوا a^n لێکدانی ژمارە a لەخۆی n جار دەردەبڕێت.

توان
بنچینە

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ جار}}$$

هەردوو کەوانەکە بۆ دەوردانی بنچینەکە بەکاربهێنە، کاتێك لەسەر یەك هێما نەوەستبێت.

شێوەی درێژ بڕی	بنچینە	شێوەی توانی
$-2(x \times x \times x)$	x	$-2x^3$
$-(2x)(2x)(2x)$	$2x$	$-(2x)^3$
$(-2x)(-2x)(-2x)$	$-2x$	$(-2x)^3$

نموونە 1 ئەم برانە بەشێوەی درێژ بڕی بنووسە.

شیکار

أ $(4y)^3$

$(4y)^3$ — $4y$ بنچینەیە و توانەکە 3

$(4y)(4y)(4y)$ — $4y$ سێ جار لە خۆی لێکدراوە.

ب $-a^3$

$-(a)^3$

$-(a\times a\times a)$

بنچینە a یەو توانەکەی 3 یە

(a) سێ جار لە خۆی لێکدراوە

ج $2y^2(x-3)^3$

$2y^2(x-3)^3$

$2(y)(y)(x-3)(x-3)(x-3)$

ئەو برە دوو بنچینەی هەیە y و $x-3$ ، y دوو جار لە خۆی لێکدراوە، $x-3$ سێ جار لە خۆی لێکدراوە.

هەوڵبدە هەر برێك بەشێوەی درێژبڕی بنووسە.

أ $(2a)^5$ ب $3b^4$ ج $-(2x-1)3y^2$

ئەو هێزانەی توانەکانیان سفرە یان ژمارەیەکی تەواوی سالبە

با a ، b هەر ژمارەیەکی ڕاستی بن جگە لە سفر، n هەر ژمارەیەکی تەواوی موجەب بێت.

بە نووسین	بە ژمارە	بە جەبر
سیفەتی توانی سفری هێزی ژمارەیەکی ڕاستی جگە لە **0** بە توانی **0** بریتییە لە **1** .	$100^0=1$	$a^0=1$
سیفەتی توانی سالب هێزی ژمارەیەکی ڕاستییە جگە لە **0** بە توانی سالب بریتییە لە هێزی هەڵگەڕاوەی ئەو ژمارە بە توانێك یەکسانە بە دژە توانی بنەڕەتی	$7^{-2}=\left(\frac{1}{7}\right)^2=\frac{1}{7^2}$ $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}=\left(\frac{2}{3}\right)^4$	$a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$

نموونـــــه 2

هەریەك لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ 2^{-3}

ب $-\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$

$\frac{1}{2^{3}}$ هەڵگەڕاوەی ژمارە 2 دەكاتە $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2\times2\times2}=\frac{1}{8}$

$-\left(\frac{4}{3}\right)^{4}$ هەڵگەڕاوەی ژمارە $\frac{3}{4}$ دەكاتە $\frac{4}{3}$

$-\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}=-\frac{256}{81}=-3\frac{13}{81}$

هەوڵبدە

هەریەك لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

ب $(-5)^{-5}$

دەتوانیت سیفەتی هێزەكان بەكاربهێنیت بۆ نووسینی ئەو بڕانەی هێزیان تێدایە بە سادەترین شێوە.

سیفەتی هێزەكان

با a و b دوو ژمارەی ڕاستی بن جگە لە 0 ، m و n دوو ژمارەی تەواوبن.

بە نووسین	بە ژمارە	بە جەبر
سیفەتی لێكدانی هێزەكان بۆ لێكدانی دوو هێز هەمان بنچینەیان هەبێت دوو توانەكە كۆبكەوە.	$4^{3}\times4^{2}=4^{3+2}=4^{5}$	$a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$
سیفەتی دابەشكردنی هێزەكان بۆ ئەوەی هێزێك دابەش بكەیت بەسەر ئەوی تریان هەمان بنچینەیان هەبێت توانی دووەم لە توانی یەكەم دەربكە.	$\frac{3^{7}}{3^{2}}=3^{7-2}=3^{5}$	$\frac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$
سیفەتی هێزی هێز بۆ ئەوەی هێزێكی توانی m بەرزبكەیتەوە بۆ توانی n ، دوو توانەكە لە یەكتر بدە وبنچینەكەش بپارێزە	$\left(4^{3}\right)^{2}=4^{3\times2}=4^{6}$	$\left(a^{m}\right)^{n}=a^{mn}$
سیفەتی هێزی ئەنجامی لێكدان بۆ ئەوەی ئەنجامی لێكدانی دوو ژمارە بۆ توانێكی دیاری كراو بەرزبكەیتەوە هەریەكەیان بەرزكەوە بە ئەو توانە و هەردوو هێزە بەئەنجامهاتووەكە لەیەكتر بدە.	$(4\times3)^{2}=4^{2}\times3^{2}$	$(a\times b)^{n}=a^{n}\times b^{n}$
سیفەتی هێزی ئەنجامی دابەشكردن بۆ ئەوەی ئەنجامی دابەشكردنی ژمارەیەك بەسەر ژمارەیەكی تر بە توانێكی دیاریكراو بەرزبكەیتەوە، هەریەكیان بۆ ئەو توانە بەرزكەوە و هێزی یەكەم بەسەر هێزی دووەم دابەشكە.	$\left(\frac{3}{5}\right)^{2}=\frac{3^{2}}{5^{2}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}$

بڕێك بە سادەترین شێوە دەبێت كاتێك هەریەك لە هێزی توان سالب و هێمای یەكتربەستن و ڕادەی لەیەكچوو لەخۆ نەگرێت.

نموونە 3

هەریەك لەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە، وا دابنێ هەموو گۆڕاوەكان جیان لە سفر

شیكار

أ $2x^3(-5x)$

$2(-5)x^3x^1$

$-10x^{3+1}$ سیفەتی لێكدانی هێزەكان

$-10x^4$

ب $\left(\frac{ab^4}{b^7}\right)^2$

$(ab^{4-7})^2=(ab^{-3})^2$ سیفەتی دابەشكردنی هێزەكان

$=a^2\left(b^{-3}\right)^2$ سیفەتی هێزی ئەنجامی لێكدان

$=a^2b^{(-3)\times 2}$ سیفەتی هێزی هێز

$a^2b^{-6}=\frac{a^2}{b^6}$ سیفەتی توانی سالب

هەوڵبدە هەریەك لەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە، وا دابنێ هەموو گۆڕاوەكان جیان لە **0**

أ $\left(5x^6\right)^3$ ب $\left(-2x^3y\right)^{-3}$

شێوەی زانستی بۆ ژمارەیەك بریتییە لە نووسینی ژمارەیەك بە بەكارهێنانی هێزەكانی ژمارە 10 بە شێوەی $m\times10^n$ كاتێك m ژمارەیەكی ڕاستی بێت پاسادانی مەرجی $1\le m<10$ بكات و n ژمارەیەكی تەواوبێت.

شێوەی زانستی	جوڵاندنی فارزەی دەیی	شێوەی ژمارەیی
1.275×10^7	7 خانە بەرەو لای ڕاست	12 750 000
3.5×10^{-7}	7 خانە بەرەو لای چەپ	0.00000035

دەتوانیت یاساكانی هێزەكان بەكاربهێنێت بۆ كرداری ژمارەیی لەسەر ئەو ژمارانەی بەشێوەی زانستی نووسراون.

نموونە 4

هەریەك لەم برانە بەسادەترین شێوە بنووسە وەڵامەكان بەشێوەی زانستی بنووسە.

شیكار

أ $\frac{9.1\times10^{-3}}{1.3\times10^8}$

$\left(\frac{9.1}{1.3}\right)\times\left(\frac{10^{-3}}{10^8}\right)$

7.0×10^{-11} 9.1 دابەشبكە بەسەر 1.3 و توانەكان لەیەك دەربكە $-3-8=-11$

ب $\left(3.5\times10^{8}\right)\left(5.2\times10^{5}\right)$

$(5.2)(3.5)\times\left(10^{8}\right)\left(10^{5}\right)$

18.2×10^{13}

1.82×10^{14}

3.5 لە 5.2 بدە و دوو توانەکە کۆبکەوە $8+5=13$
لەبەرئەوەی $18.2 > 10$ فارزەکە بۆ لای چەپ
بجولێنەوە و 1 بۆ توانەکە زیادبکە.

هەوڵبدە هەریەک لەم برانە بەسادەترین شێوە بنووسە وەڵامەکان بەشێوەی زانستی بنووسە.

أ $\dfrac{2.325\times10^{6}}{9.3\times10^{9}}$

ب $\left(4\times10^{-6}\right)\left(3.1\times10^{-4}\right)$

نموونە 5

جێبەجێکردن لەسەر شیکارکردنی پرسیارەکان.

ڕوناکی بە خێرای ڕووناکی بریتییە لە 3×10^{5} km / sec بە نزیکەیی. ڕوناکی چەند خوولەکی پێویستە بۆ ئەوەی دووری نێوان ڕۆژ و موشتەری ببڕێت.

دووری نێوان ڕۆژ و هەسارەکان بەمەتر	
هەسارە	دووری
عەتارد	5.8×10^{10}
ڤینۆس	1.1×10^{11}
زەوی	1.5×10^{11}
مەریخ	2.3×10^{11}
موشتەری	7.8×10^{11}
زوحەل	1.4×10^{12}
ئۆرانۆس	2.9×10^{12}
نیبتۆن	4.5×10^{12}
بلۆتۆ	5.9×10^{12}

1. پرسیارەکە تێبگە.

داواکراو بریتییە لە هەژمارکردنی ئەو کاتەی کە ڕوناکییەکە دەربەدچێت لە ڕۆژ تا دەگاتە موشتەری.

لیستێک بۆ زانیارییە گرنگەکان دروستبکە.

- خێرای ڕووناکی لەبۆشایی بریتییە 3×10^{5} km/sec بەنزیکەیی
- دووری نێوان ڕۆژ و موشتەری دەکاتە 7.8×10^{11} m .

2. پلان دابڕێژە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکە

ئەو پەیوەندییەی کە خێرایی و دووری و کات بەیەکەوە دەبەستێتەوە بەکاربهێنە.

خێرایی = $\dfrac{\text{دووری}}{\text{کات}}$

3. شیکارکردنی پرسیارەکە بە گۆڕینی خێرایی ڕووناکی

لە $\dfrac{\text{کیلۆمەتر}}{\text{چرکە}}$ بۆ $\dfrac{\text{مەتر}}{\text{خولەک}}$ دەستپێبکە.

$3\times10^{5}\dfrac{\cancel{km}}{\cancel{sec}}\left(\dfrac{10^{3}m}{1\cancel{km}}\right)\left(\dfrac{60\cancel{sec}}{1min}\right)$

لێرە 10^{3} m = 1000 m لە هەر کیلۆمەترێک.

$(3\times60)\times\left(10^{5}\times10^{3}\right)\dfrac{m}{min}$

180×10^{8} m/min$=1.8\times10^{10}$ m/min

کەواتە خێرایی ڕۆناکی 1.8×10^{10} مەترە لە خولەکێکدا.
ئێستا پەیوەندی نێوان خێرایی و دووری و کات بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ژمارەی ئەو خولەکانەی ڕووناکییەکە پێویستیەتی بۆ ئەوەی لە ڕۆژەوە بگاتە موشتەری.

$$\text{کات} = \frac{\text{دووری}}{\text{خێرایی}} = \frac{7.8\times10^{11}}{1.8\times10^{10}} \approx 43.33 \text{ خوولەك}$$

4. ساغبکەوە ڕووناکییەکە بە نزیکەیی پێویستی بە 43.33 خولەك هەیە بۆ ئەوەی ماوەی نێوان ڕۆژ و موشتەری ببڕێت. لەبەر ئەوەی ڕۆناکی بە خێرایی 3×10^5 km/s دەڕوات و پێویستی بە نزیکەی $43.33\times60\approx2600$ چرکە هەیە بۆ بڕینی ماوەی نێوان ڕۆژ و موشتری، کەواتە ئەو دوورییە دەکاتە:

$$3\times10^5\times2600=7.8\times10^8$$

7.8×10^8 km یان 7.8×10^{11} m کەواتە وەڵامەکە بەجێیە

هەوڵبدە ڕۆناکی چەند خولەکی پێویستە بۆ ئەوەی لە ڕۆژەوە بگاتە زەوی؟

ڕاهێنـــــــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 کەی دەبێت ژمارەیەك بەشێوەی زانستی بنووسرێت؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم برانە بەشێوەی درێژبڕی بنووسە.

2 $4(a-b)^2$
3 $(12xy)^4$
4 $-x^2(-2y)^5$
5 $\left(-\frac{1}{2}b\right)^3$

هەریەك لەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

6 $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$
7 5^0
8 $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$
9 10^{-1}

هەریەك لەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە، وا دابنێ هەموو گۆڕاوەکان جیان لە سفر.

10 $\left(-3a^2b^3\right)^2$
11 $c^3d^2\left(c^{-2}d^4\right)$
12 $\frac{5uv^6}{u^2v^2}$
13 $10\left(\frac{y^5}{x^2}\right)^2$
14 $-2s^{-3}t\left(7s^{-8}t^5\right)$
15 $-5m\left(mn^2\right)^3$
16 $\frac{(4b)^2}{2b}$
17 $\frac{x^{-1}y^{-2}}{x^3y^{-5}}$

هەریەك لەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە بە نووسینی وەڵامەکان بەشێوەی زانستی.

18 $(2.2\times10^5)\times(4.5\times10^{11})$
19 $\frac{7.8\times10^8}{2.6\times10^{-3}}$
20 $\frac{1.6\times10^{-3}}{4.0\times10^4}$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

هەریەك لەم بڕانە بەشێوەی درێژیی بنووسەوە.

21 $(m+2n)^3$ 22 $5x^3$ 23 $(-9uv)^3w^4$ 24 $2x(-y^2-x)^2$

هەریەك لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

25 $(-4)^{-2}$ 26 $\frac{3}{4}^{-1}$ 27 $\frac{5}{2}^{-3}$ 28 -6^0

هەریەك لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە. وادابنێ هەموو گۆڕاوەکان جیان لە سفر.

29 $\frac{-100u^3v^{-5}}{25u^{-2}v^6}$ 30 $(-x^4y^2)^5$ 31 $(16u^4v^6)^{-2}$ 32 $8a^2b^5(-2a^3b^2)$

هەریەك لەم بڕانە بەشێوەی زانستی بنووسە.

33 $(3.2\times10^6)(1.7\times10^{-4})$ 34 $\frac{5.1\times10^4}{3.4\times10^{-5}}$ 35 $(6.8\times10^3)(9.5\times10^5)$

36 **بژمێر** پرۆسێسەری بژمێرێك خێراییەکەی 5.4 گێگا هێرتزە دەتوانێت 5.4×10^9 کرداری ژمێرەیی جێبەجێبکات لەیەك چرکەدا. گۆڕینی فایلێکی Mp3 بۆ فایلێکی دەنگی پێویستی بە 5.02×10^{11} کرداری ژمارەیی هەیە. گۆڕینی ئەو فایلە لەلایەن بژمێرەکە چەند خولەك دەخایەنێت؟ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە؟

هەر یەك لەم ژمارانە بە شێوەی هێزی ژمارە 2 بنووسە پاشان ژمارەکانی هەر کۆمەڵەیەك لەبچووکترینەوە بۆ گەورەترین ڕیزبکە.

37 16^{-2}، 2^{-1}، 4^1، 8^2 38 8^{-2}، 4^2، -4^3، 2^{-1} 39 2^{-2}، 16^1، 4^0، -8^2

هەریەك لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە. وادابنێ هەموو گۆڕاوەکان جیان لە سفر.

40 $\frac{27x^3y}{18x^2y^4}$ 41 $\left(\frac{3a^3b}{2a^{-1}b^2}\right)^2$ 42 $12x^0y^5(-2a^3b^2)$

43 $\frac{72x^2y^3}{-24x^2y^5}$ 44 $\left(\frac{5ab}{-3a^2}\right)^{-2}$ 45 $(6x^5y^3)(-3x^2y^{-1})$

پێوەرەکان: ئەمانەی خوارەوە هەژماربکە.

46 یاردە و ئینج دوو پێوەرن بۆ درێژی لە بەریتانیا بەکاردێن. یەك یاردە دەکاتە 36 ئینج. چەند ئینجی چوارگۆشە لە یاردەیەکی چوارگۆشەدا هەیە؟

47 چەند سانتیمەتری چوارگۆشە لە مەترێکی چوارگۆشەدا هەیە؟

48 لە بەریتانیا پێوەری سێیەم بۆ درێژی بەکاردێت، ئەویش پێیە هەر پێیەك دەکاتە 12 ئینج. ژمارەی ئینجە سێجاکان لە پێیەکی سێجا چەندە؟

49 ژمارەی مەترە سێجاکان لە کیلۆمەترێکی سێجا چەندە؟

هەریەك لەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە. وادابنێ هەموو گۆڕاوەکان جیان لە سفر.

50 $-a^2b^6\left(-7ab^{-4}\right)$

51 $\dfrac{14x^{-2}y^3}{-8x^{-5}y^5}$

52 $\left(\dfrac{20x^6}{2x^2}\right)^3$

53 $\left(10x^{-2}y^0z^{-3}\right)^2$

54 $\left(-3a^2b^{-1}\right)$

55 $\left(8m^4n^{-2}\right)\left(-3m^{-2}n\right)^0$

56 ناوەندە ژمێرەیی لێدانی دڵ لە ژیانی مرۆڤ چەندە، ئەگەر زانیت ناوەندی لێدانی دڵ لە چرکەیەك 1.2 و ناوەندی ژیانی مرۆڤ 75 ساڵە؟

57 ناوەندە ژمێرەیی هەناسەدانی مرۆڤ چەندە، ئەگەر زانیت ناوەندی هەناسەکانی مرۆڤ لە خولەکێك 16یە و ناوەندی ژیانی مرۆڤ 75 ساڵە؟

58 ناوەندە ژمێرەیی مووەکانی سەری مرۆڤ چەندە، ئەگەر زانیت ناوەندە ژمارەی لەیەك سانتیمەتر دووجا 254 مووە و ناوەندە ڕووبەری سەری مرۆڤ بریتییە لە $500cm^2$.

ئەو سیفەتانە دیاریبکە کە هەر یەکسانییەك دەریدەبڕێت.

59 $\left(x^5\right)^3=x^{15}$

60 $\left(m^2n^5\right)^4=m^8n^{20}$

61 $\dfrac{3b^3}{b^{-2}}=3b^5$

62 $\left(\dfrac{xy^5}{x^3}\right)^4=\dfrac{x^4y^{20}}{x^{12}}$

63 زمان زۆر جار ڕستەیەکی لەم جۆرە بەکاردێت (ژمارەی دانیشتووانی ئەم وولاتە 3.8 ملیۆن کەسە) بۆ دەربڕین لە ژمارەی دانیشتوان. ئەو ژمارەیە بەشێوەی زانستی بنووسە و باسی پەیوەندی نێوان نواندنی ژمارەکە لە بیرکاری و دەربڕینی زمان لەوبکە.

64 بیری ڕەخنەگر سیفەتی دابەشکردنی هێزەکان بەکاربهێنە بۆ ڕوونکردنەوەی ئەو هۆیەی وادەکات هێزی 0^0 پێناسە نەکراوبێت.

65 کام لەم ژمارانە بەشێوەیەکی زانستی دروست نووسراوە.

أ 11×0^5 ب 58.5×0^4 ج 0.245×10^{-7} د 7.25×10^0

66 کام بڕ یەکسانە بە$(-5)(-5)(-5)(-5)(-5)(-5)$ ؟

أ 5^{-6} ب $(-5)^{-6}$ ج $(-5)^6$ د -5^6

67 ئەگەر گۆڕاوەکانی x و y و z جیابن لە 0 ، کام بڕ دەکاتە $\frac{x^4 y^{-3}}{x^2 z^0}$.

أ $\frac{x^2}{yz}$

ب $\frac{x^2 z}{y^3}$

ج $\frac{x^{-2}}{y^{-3} z}$

د $\frac{x^2}{y^3}$

68 سەرنجبدە $2^4 = 4^2$. ئەگەر x و y دوو ژمارەی تەواوی موجەب بن، کە پاسەدانی $x < y$ دەکەن، سێ نموونە بهێنەوە بۆ بەهایەکانی x و y کە $x^y < y^x$ و سێ نموونەی تر بۆ بەهایەکانی x و y کە $y^x < x^y$.

ڕوانینێك بۆ دواوە

هاوکێشە دووجاکە لەسەر شێوەی گشتی $ax^2+bx+c=0$ بنووسە، بەهاکانی a و b و c دیاربکە.

69 $11x(5-x)=0$

70 $(2x-10)(x+1)=0$

71 $4(x+5)(x-5)=0$

72 $-(x+1)(3x+1)=0$

هەریەکە لەم هاوکێشانەی خوارەوە شیکاربکە.

73 $x^2-5x=-6$

74 $x^2+2x-15=0$

75 $(x-2)(x+3)=5$

ئەم یەکسانبووانە تەواوبکە (پۆلەکانی پێشوو).

76 $1= \square \times \frac{1}{3}$

77 $4x(-3+\square)=-12+32$

78 $0=\sqrt{7}+\square$

هەر بڕێك لەمانەی خوارەوە هەژماربکە.

79 $\frac{2mn}{n^2-2n+5m}$ ، کاتێك $m=3$ و $n=-1$

80 $2x(9y-x^2)$ ، کاتێك $x=-3$ و $y=10$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

أ هاوکێشەیەك بنووسە کە تەنها ژمارەی سروشتی تێدابێت و شیکارەکەی پێویستی بە ژمارەی سالب هەبێت.

ب هاوکێشەیەك بنووسە تەنها ژمارەی تەواوی تێدابێت، و شیکارەکەی پێویستی بەژمارەی ڕێژەی هەبێت.

برە ڕەگییەکان

Radical Expressions



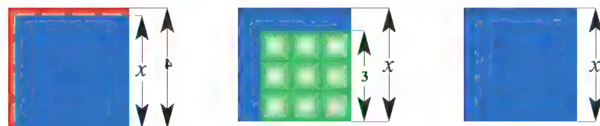


ئامانجەکان

- بەهای بڕێك هەژماردەکات کە ڕەگی تێدایە.
- ئەو برانە سادە دەکات کە ڕەگیان تێدایە.

خەملاندنی ڕەگی دووجا Estimating Square Root

کارزان چوارگۆشەیەکی شینی لەبەردەستە ڕووبەرەکەی 12 یەکە دووجایە، چۆن درێژی لایەکی دیاریدەکات؟ بیرت بێت کە ڕێسای هەژمارکردنی ڕووبەری چوارگۆشە ڕێگات پێدەدات $x^2 = 12$ بنووسیت کاتێك x هێمای درێژی لایەکی چوارگۆشە شینەکە بێت. کەواتە درێژی لایەکی چوارگۆشە شینەکە بریتییە لە ڕەگی دووجای ژمارە 12 لەبەرئەوەی 12 دووجایەکی تەواو نییە، لەسەرت پێویستە درێژی لایەکی x بخەمڵێنیت. تێبینی ئەوە بکە کە 12 دەکەوێتە نێوان دوو ژمارەی 9 و 16.



ڕووبەری چوارگۆشە شینەکە لە 9 نزیکترە وەك لە 16. لەمەوە دەردەچێت کە درێژی لایەکی چوارگۆشەکە دەکەوێتە نێوان 3 و 4 و لەبەرئەوەی ڕووبەری چوارگۆشەکە 12 لەلای 3 نزیکترە لە نێوان ڕووبەری $9 = 3^2$ و $16 = 4^2$ کەواتە درێژی لایەکەی دەکەوێتە نێوان 3.4 و 3.5 .

$(3.43)^2 = 11.7649$	$(3.42)^2 = 11.6964$	$(3.41)^2 = 11.6281$	$(3.4)^2 = 11.56$
$(3.47)^2 = 12.0409$	$(3.46)^2 = 11.9716$	$(3.45)^2 = 11.9025$	$(3.44)^2 = 11.8336$
	$(3.5)^2 = 12.25$	$(3.49)^2 = 12.1801$	$(3.48)^2 = 12.1104$

کەواتە باشترین خەملاندن بۆ ڕەگی دووجای 12 بریتییە لە 3.46 کەواتە $\sqrt{12} \approx 3.46$.

ڕەگی دووجا Square Root

ئەگەر a ژمارەیەکی ڕاستی سالب نەبێت، ئەوا دوو ڕەگی دووجای هەیە، یەکێکیان موجەبە وبە $\sqrt{a}$ دەنووسرێت، ئەوی تریان سالبە بە $-\sqrt{a}$ دەنووسرێت و ئەو دوو ژمارە ساغدەکەنەوە ئەو سیفەتە

$$\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}\right)=a \qquad \left(-\sqrt{a}\right)\left(-\sqrt{a}\right)=a$$

سادەکردنی برە ڕەگییەکان Simpligying Radical Expressions

برە ڕەگییەکان **Radical Expressions** ئەو برانەن کە ڕەگییان تێدایە، کاتێك دەتەوێت برە ڕەگییەکان کۆبکەیتەوە یان لێکیاندەربکەیت، دڵنیابە لە یەکسانبوونی ئەو ژمارانەی دەکەونە ژێر هێمای ڕەگەکان بۆ نموونە دەتوانیت دوو ژمارەی $2\sqrt{5}$ و $4\sqrt{5}$ کۆبکەیتەوە $2\sqrt{5}+4\sqrt{5}=6\sqrt{5}$ دەستدەکەوێت.

نموونە 1

ئەم برانە سادەبکە.

أ $5\sqrt{6}-2\sqrt{6}$

ب $5+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}-3$

ج $8\sqrt{3}+6\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

د $b\sqrt{x}+y\sqrt{x}$

شیکار

أ سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە بۆ کۆکردنەوەی ڕادە لێکچووەکان، پاشان کۆڵکەی هاوبەش کە $\sqrt{6}$ هەژماربکە. $5\sqrt{6}-2\sqrt{6}=(5-2)\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

ب ڕادەکان ڕیزبکەوە بۆ ئەوەی سادەکردنەکە ئاسان بێت.

$$5+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}-3=5-3+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}=2+4\sqrt{7}$$

ج ڕادەکان ڕیزبکەوە بۆ ئەوەی سادەکردنەکە ئاسان بێت.

$$8\sqrt{3}+6\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}=8\sqrt{3}-\sqrt{3}+6\sqrt{2}+2\sqrt{2}=7\sqrt{3}+8\sqrt{2}$$

د وەك ژمارەکان لەگەڵ گۆڕاوەکان ڕەفتاربکە.

$$b\sqrt{x}+y\sqrt{x}=(b+y)\sqrt{x}$$

هەوڵبدە ئەم برانە سادەبکە. أ $4\sqrt{6}-\sqrt{6}$ ب $y+2\sqrt{x}-2y-3\sqrt{x}$

چالاکی

برە ڕەگییەکان و کردارەکان Operations with Radical Expressions

پەیوەندی نێوان ڕەگەکان و هێزەکان بەکاربهێنە، بۆ جێبەجێکردنی کردارەکان.

1. بەدوو ڕێگا $\sqrt{9\times16}$ هەژماربکە.

أ $\sqrt{9\times16}=\sqrt{144}=?$ ب $\sqrt{9\times16}=\sqrt{9}\times\sqrt{16}=?$

2. سێ نموونە بهێنەوە بۆ دڵنیابوون لە ڕاستی پەیوەندی. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

3. $\sqrt{9+16}$ و $\sqrt{9}+\sqrt{16}$ هەژماربکە و دوو ئەنجامەکە بەراوردبکە.

4. سێ نموونە بهێنەوە دیاربکەن کە $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ هەموو کات ڕاست نییە.

خاڵی چاودێری ✓

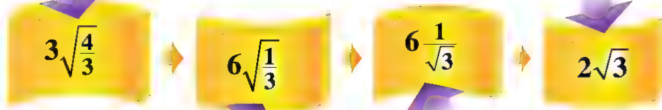
لێکدانی ڕەگە دووجاکان Multiplying Square Roots

a و b دوو ژمارەی ڕاستی سالب نەبن ئەوا:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

ڕەفتارکردن لەگەڵ برە ڕەگییە دووجا سادەکراوەکان ئاسانترە لە ڕەفتارکردن لەگەڵ برە ڕەگییە دووجا سادەنەکراوەکان برێکی ڕەگی بە سادەترین شێوە **Simplist form** دەبێت ئەگەر ئەم مەرجانەی تێدابوو:

1. دووجای تەواو لە نێوان کۆلکەکانی ئەو ژمارەیە نەبێت کە دەکەوێتە ژێر هێمای ڕەگەکە.
2. کەرت لە ژێر هێمای ڕەگ نەبێت.
3. ڕەگ لەژێرەی هیچ کەرتێك نەبێت لە برەکە (ڕێژەکردنی ژێرە لەبیر نەکەی).



نموونە 2 ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\sqrt{12}$ ب $\sqrt{400}$ ج $\sqrt{a^2}$ د $\sqrt{a^5b^{10}}$

شیکار

بەدوای دووجا تەواوەکان لە نێوان هاوکۆلکەکاندا **Factors** بگەڕێ، و سیفەتی لێکدانی ڕەگە دووجاکان بەکاربهێنە ڕەگە دووجاکانی ژمارە دووجاکان سادەبکە (واتا لەژێر ڕەگ بیانهێنە دەرەوە) کۆلکەکانی تر بەجێبهێڵە.

أ $\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

ب $\sqrt{400}=\sqrt{4}\times\sqrt{100}=2\times10=20$

لەبەرئەوەی هێمای دووجا ڕەگێکی ناسالب نیشاندەدات ئەوا $\sqrt{a^2}$ سالب نییە بۆ نیشاندانی ئەوە. هێمای بەهای ڕووت بەکاربهێنە کاتێك توانی گۆڕاو لەژێر هێمای ڕەگی دووجا ژمارەی جووت بێت، و لە دەرەوەی هێماکە دەبێت دوای سادەکردن ببێتە ژمارەی تاك.

ج $\sqrt{a^2} = |a^1| = |a|$

د $\sqrt{a^5b^{10}} = \sqrt{a(a^2)^2(b^5)^2} = a^2|b^5|\sqrt{a}$

هەوڵبدە ئەم برە بە سادەترین شێوە بنووسە. $\sqrt{72m^2n^5}$

بیری ڕەخنەگر بۆچی بەکارهێنانی هێمای بەهای ڕووت لەمانەی دێت پێویست ناکات.

أ $\sqrt{b^3} = b\sqrt{b}$ ب $\sqrt{b^4} = b^2$

نموونە 3 ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\left(5\sqrt{3}\right)^2$ ب $\sqrt{3} \times \sqrt{6}$

ج $\sqrt{2}\left(6+\sqrt{12}\right)$ د $\left(3-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)$

شیکار

أ لەبیرت بێت کە دووجای ژمارەیەك بریتییە لە ئەنجامی لێدانی ژمارەکە لە خۆی ئەم بیرۆکەیە جێبەجێبکە، پاشان کۆلکەکان ڕیزبکە پێش لێکدان.

$$\left(5\sqrt{3}\right)^2 = \left(5\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{3}\right) = (5\times5)\left(\sqrt{3}\times\sqrt{3}\right) = 25\times3 = 75$$

ب سیفەتی لێکدانی ڕەگەکان بەکاربهێنە، ئەنجامی لێکدانەکەی کە لەژێر ڕەگەکەدایە شیتەڵبکە پاشان سادەیبکە. $\sqrt{3}\times\sqrt{6} = \sqrt{3\times6} = \sqrt{18} = \sqrt{9\times2} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

ج سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە بۆ ئەوەی لێکدان و شیتەڵ و سادەکردن ئەنجامبدەیت.

$$\sqrt{2}\left(6+\sqrt{12}\right) = 6\sqrt{2}+\sqrt{2}\times\sqrt{12} = 6\sqrt{2}+\sqrt{2\times12}$$
$$= 6\sqrt{2}+\sqrt{24} = 6\sqrt{2}+\sqrt{6\times4} = 6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$$

د $\left(3-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right) = 12+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}-2 = 10-\sqrt{2}$

هەوڵبدە ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە أ $\left(2\sqrt{7}\right)^2$ ب $\sqrt{2}\left(4-\sqrt{8}\right)$

دابەشکردنی ڕەگە دووجاکان Dividing Squar Roots

با a و b دوو ژمارەی ڕاستی موجەب بن، ئەوا:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

نموونە 4 ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە:

أ $\sqrt{\frac{16}{25}}$ ب $\sqrt{\frac{7}{16}}$ ج $\sqrt{\frac{a^2b^3}{c^2}}$ د $\sqrt{\frac{9}{5}}$

شیکار:

هەریەك لەم ڕەگە دووجایانە بنووسە، دوای بەکارهێنانی سیفەتی دابەشکردنی ڕەگەکان.

ئەنجامەکانی هەریەکە لەسەرەوژێرە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$ ب $\sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

ج $\sqrt{\frac{a^2b^3}{c^2}} = \frac{|a|b\sqrt{b}}{|c|}$ د $\sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

ژێرەی دوا وەڵام ڕەگی تێدایە. ئەگەر دەتەوێت لەو ڕەگە ڕزگاربیت، برەکە لە $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ بدە کە بریتییە لە 1 بەکرداری دەربازبوون لە ڕەگی ژێرەکە دەوترێت بەڕێژەکردنی ژێرەکە.

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

هەوڵبدە ئەم برانە بەسادەترین شێوە بنووسە أ $\sqrt{\frac{4}{24}}$ ب $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ج $\sqrt{\frac{ab^2}{c}}$

ڕاهێنان

بەردەوامی لە بیرکاریدا

1 ڕوونیبکەوە، چۆن کاغەزی هێڵە ڕوونکردنەوەییەکان بەکاردەهێنیت بۆ دۆزینەوەی ڕەگی دووجای ژمارە 16 (دووجای تەواو).

2 ڕوونیبکەوە، چۆن لاپەڕەی چوارگۆشەکان بەکاردەهێنیت بۆ خەملاندنی ڕەگی دووجای ژمارە 19 (دووجای تەواو نییە).

3 ڕوونیبکەوە، چۆن $\sqrt{7}$ دەخەملێنیت بەبێ بەکارهێنانی بژمێر و لاپەڕەی چوارگشەکان.

4 چۆن شیتەڵکردن بەکاردەهێنیت بۆ سادەکردنی بریکی ڕەگی وەك $5\sqrt{90x^3y^4}$ ؟

5 سادەترین شێوەی برێکی ڕەگی چۆنە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم ڕەگە دووجایانە هەژماربکە

6 $\sqrt{36}$ 7 $-\sqrt{64}$ 8 $\pm\sqrt{81}$ 9 $-\sqrt{121}$

ئەم برانە بەسادەترین شێوە بنووسە.

10 $8\sqrt{3}-6\sqrt{3}$ 11 $9+3\sqrt{7}-5\sqrt{7}+4$

ئەم برانە بەسادەترین شێوە بنووسە.

12 $\sqrt{32}$ 13 $\sqrt{x^2y^7}$ 14 $\sqrt{27x^2}$ 15 $\sqrt{a^7b^3}$

ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

16 $\left(7\sqrt{11}\right)^2$ 17 $\sqrt{2}\times\sqrt{10}$ 18 $\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)$

19 $\sqrt{\frac{9}{4}}$ 20 $\sqrt{\frac{6}{49}}$ 21 $\sqrt{\frac{225}{18}}$ 22 $\sqrt{\frac{x^7y^1}{z^3}}$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ڕەگی دووجا هەژماربکە ئەگەر دووجاکە ڕێژەیی نەبێت، بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

23 $\sqrt{225}$ 24 $-\sqrt{169}$ 25 $-\sqrt{11}$ 26 $\sqrt{\frac{4}{9}}$ 27 $-\sqrt{40}$

28 $-\sqrt{27}$ 29 $\sqrt{1000}$ 30 $\sqrt{10000}$ 31 $-\sqrt{0.04}$ 32 $\sqrt{0.059}$

بە بەکارهێنانی شیتەڵکردن بە سادەترین شێوە بیانووسە.

33 $\sqrt{49}$ 34 $\sqrt{196}$ 35 $\sqrt{576}$ 36 $\sqrt{3600}$ 37 $\sqrt{192}$

38 $\sqrt{75}$ 39 $\sqrt{98}$ 40 $\sqrt{1620}$ 41 $\sqrt{264}$ 42 $\sqrt{648}$

ئەگەر هەریەک لە a و b ژمارەی موجەب بن، ڕاستی و ناڕاستی ئەم ڕستانە دیاریکە.

43 $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 44 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ 45 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

ئەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

46 $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$ 47 $\sqrt{8}\times\sqrt{18}$ 48 $\sqrt{48}\times\sqrt{3}$ 49 $\sqrt{54}\times\sqrt{6}$

50 $\sqrt{\frac{64}{16}}$ 51 $\sqrt{\frac{96}{2}}$ 52 $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}}$ 53 $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$

54 $\sqrt{5}\times\sqrt{15}$ 55 $\sqrt{98}\times\sqrt{14}$ 56 $\sqrt{\frac{56}{8}}$ 57 $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{8}}$

ئەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە. وایدابنێ هەموو گۆڕاوەکان سالب نین، و هەموو ژێرەکان جیان لە 0.

58 $\sqrt{a^4b^6}$ 59 $\sqrt{x^8y^9}$ 60 $\sqrt{\frac{a^6}{b^{10}}}$ 61 $\sqrt{\frac{x^3}{y^6}}$

ئەو کردارانە جێبەجێکە کە لە توانادایە و ئەنجام بە سادەترین شێوە بنووسە.

62 $3\sqrt{5}+4\sqrt{5}$ 63 $4\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5\sqrt{5}$ 64 $\sqrt{6}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}$

65 $(4+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})$ 66 $\frac{6+\sqrt{18}}{3}$ 67 $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

ئەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

68 $(3\sqrt{5})^2$ 69 $(4\sqrt{25})^2$ 70 $\sqrt{12}\times\sqrt{6}$

71 $\sqrt{72}\times\sqrt{32}$ 72 $3(9+\sqrt{5})$ 73 $\sqrt{5}(6-\sqrt{15})$

74 $\sqrt{6}(6+\sqrt{18})$ 75 $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$ 76 $(\sqrt{3}-4)(\sqrt{3}+2)$

بەرەنگاری

77 $\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)^2$ 78 $\sqrt{12}(\sqrt{3}+8)^2$ 79 $\sqrt{5}(\sqrt{5}-4)^2$

بەستنەوە

ئەندازە درێژی لایەکی چوارگۆشەیەك بدۆزەوە ڕووبەرەکەی بریتییە لە:

80 $250m^2$ **81** $144m^2$ **82** $28m^2$

جێبەجێکردنەکان

83 باخچەکان لەبەر دەرگای ماڵی سوارە باخچەیەکی چوارگۆشە هەیە ڕووبەرەکەی بریتییە لە$676m^2$. درێژی لایەکی چەندە؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

84 $\left(-a^2b^2\right)^3\left(a^4b^2\right)^3$ **85** $\frac{x^5y^7}{x^2y^3}$ **86** $\left(\frac{20x^3}{-4x^2}\right)^3$

لێکبدە.

87 $(2x-4)(2x-4)$ **88** $(3d+5)(2d-6)$ **89** $(6b+1)(3b-1)$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەو هێزانەی تونەکانیان ڕێژەییە بەکاردێن بۆ دەربڕینی ڕەگەکان و بەم شێوەیە $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ دەنووسرێن کاتێك a ژمارەیەکی ڕاستی ناسالبە و n ژمارەیەکی تەواوە لە 2 کەمتر نییە. بۆ نموونە: $\sqrt[3]{27}=3$ و $3^3=27$ و $\sqrt[4]{16}=2$ و $2^4=16$.

یاساکانی هێزەکان بەکاربهێنە بۆ نووسینی ئەم برانە بە سادەترین شێوە بۆ نموونە:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\left(x^{\frac{5}{2}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=x^{\frac{8}{2}}=x^4$$

سادەیان بکە.

90 $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4\left(x^5\right)^{\frac{1}{3}}$ **91** $(xy)^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^6\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2$

92 $\left(x^3y^{\frac{3}{2}}\right)^6(xy)^{\frac{1}{2}}$

لۆگاریتمەکان

Logarithms



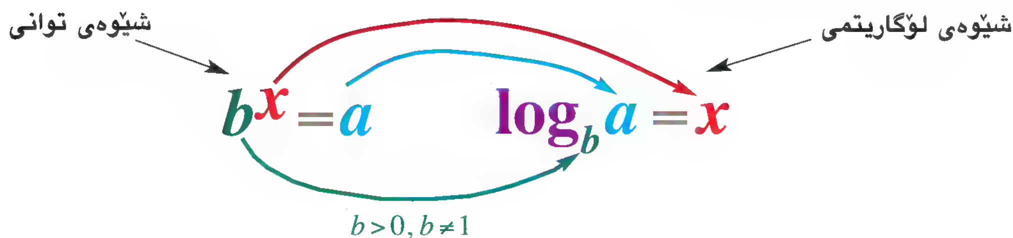


بۆچی
لۆگاریتمەکان بە شێوەیەکی فراوان بۆ پێوانەکان بەکاردێت، وەك پێوانی pH بۆ دیاریکردنی ترشی گیراوەکان

ئامانجەکان

- شێوەی توانی بۆ شێوەی لۆگارتمی دەگۆڕێت.
- بری لۆگارتمی بە سادەترین شێوە دەنووسێت و بەهاکەی هەژماردەکات.

لەگەڵ پێشکەوتنی بازرگانی و باشتربوونی دەریاوانی، کرداری ژمێریاری ئالۆز گەشەیسەند، بەمەش ڕێگاکانی ژمێرەیی باشتر و کەم ئەرك بووە پێویستیەکی گەورە.
لەبیرکارییدا لۆگاریتمەکان دۆزرانەوە و نەخشەی لۆگارتمی و جێبەجێکردنی لە ئامار و زۆر بواری تر پێویستیەکی لە کاربوو.
لۆگاریتم کرداری پێچەوانەی هێزەکانە، هەروەك چۆن لێدەرکردن پێچەوانەی کۆکردنەوەیە، لۆگارتمیش پێچەوانەی هێزەکانە.



بۆ نموونە نووسینی $\log_{10} 100 = 2$ هاوتای نووسینی $10^2 = 100$، بەم شێوەیە دەخوێندرێتەوە: لۆگارتمی a بۆ بنچینەی b .

گۆڕین لە شێوەی توانی بۆ شێوەی لۆگارتمی و بەپێچەوانەوە

شێوەی لوگارتمی	توان	بنچینە	شێوەی توانی
$\log_2 64 = 6$	6	2	$2^6 = 64$
$\log_7 49 = 2$	2	7	$7^2 = 49$
$\log_3 243 = 5$	5	3	$3^5 = 243$
$\log_5 125 = 3$	3	5	$5^3 = 125$

لۆگارتم Logarithm

بە ژمارەی ڕاستی x دەوترێت لۆگارتمی ژمارەی موجەبی a بە بنچینەی b $(b \neq 1)$ و دەنووسرێت.

$x = \log_b a$ ئەگەر $b^x = a$.

نموونــــە 1

لە شێوەی توانی بۆ شێوەی لۆگارتمی بگۆڕە.

أ $2^5 = 32$ ب $3^2 = 9$ ج $4^3 = 64$ د $5^0 = 1$

شیکار

أ $2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2 32 = 5$

ب $3^2 = 9 \Leftrightarrow \log_3 9 = 2$

ج $4^3 = 64 \Leftrightarrow \log_4 64 = 3$

د $5^0 = 1 \Leftrightarrow \log_5 1 = 0$

هەوڵبدە لە شێوەی توانی بۆ شێوەی لۆگارتمی بگۆڕە.

أ $2^{10} = 1024$ ب $5^1 = 5$ ج $100^0 = 1$

نموونــــە 2

لە شێوەی لۆگارتمی بۆ شێوەی توانی بگۆڕە

أ $\log_{10} 1000 = 3$ ب $\log_9 81 = 2$ ج $\log_5 125 = 3$ د $\log_{10} 1 = 0$

شیکار

أ $\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 1000$

ب $\log_9 81 = 2 \Leftrightarrow 9^2 = 81$

ج $\log_5 125 = 3 \Leftrightarrow 5^3 = 125$

د $\log_{10} 1 = 0 \Leftrightarrow 10^0 = 1$

هەوڵبدە $\log_{10} 0.01 = -2$ بەشێوەی توانی بنووسە.

نموونــــە 3

لە شێوەیەك بۆ ئەوی تریان بگۆڕە.

أ $6^2 = 36$ ب $5^{-3} = \frac{1}{125}$ ج $\log_{27} \frac{1}{9} = -\frac{2}{3}$ د $\log_{10} 10\sqrt{10} = \frac{3}{2}$

شیکار

أ $6^2 = 36 \Leftrightarrow \log_6 36 = 2$

ب $5^{-3} = \frac{1}{125} \Leftrightarrow \log_5 \frac{1}{125} = -3$

ج $\log_{27}\frac{1}{9}=-\frac{2}{3}\Leftrightarrow 27^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{9}$

د $\log_{10}10\sqrt{10}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}$

هەوڵبدە لە شێوەیەك بۆ ئەوی تریان بگۆڕە.

أ $7^2=49$ ب $\log_4\frac{1}{16}=-2$ ج $\log_5 25\sqrt{5}=\frac{5}{2}$

نموونە 4

ئەم شێوانە بۆ ئەوەی تریان بگۆڕە، بەهاکەی بدۆزەوە.

أ $\log_2\frac{1}{16}$ ب $\log_3 3\sqrt{3}$ ج $\log_a a$ د $\log_a 1$

شیکار

أ ئەگەر $x=\log_2\frac{1}{16}$ ئەوا $2^x=\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}=2^{-4}$ بەمەش $x=-4$

ب ئەگەر $x=\log_3 3\sqrt{3}$ ئەوا $3^x=3\sqrt{3}=3^1\times 3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}}$ بەمەش $x=\frac{3}{2}$.

ج ئەگەر $x=\log_a a$ ئەوا $a^x=a$ بەمەش $x=1$.

د ئەگەر $x=\log_a 1$ ئەوا $a^x=1=a^0$ بەمەش $x=0$.

هەوڵبدە ئەمانەی خوارەوە هەژماربکە.

أ $\log_{10}10000$ ب $\log_2\frac{1}{8}$ ج $\log_{10}0.001$ د $\log_x x$

بیری ڕەخنەگر

1. بۆچی $\log_a a$ هەموو کات دەکاتە 1؟
2. کەی $\log_a b=\log_b a$ ؟ ڕوونیبکەوە.
3. ئایا لۆگارتمی ژمارەی سالب هەیە؟ ڕوونیبکەوە.

$\log_a^b=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}$

Logarithrm Rules — سیفەتی لۆگاریتمەکان

لەبەرئەوەی لۆگارتم پێچەوانەی هێزەکانە، هەر سیفەتێك لە سیفەتەکانی هێزەکان دەبنە سیفەتێك لە سیفەتەکانی لۆگاریتم.

Logarithrm properties — سیفەتەکانی لۆگارتم

با هەریەك لە a و b و c ژمارەی ڕاستی موجەب بن کاتێك $c \neq 1$.

بە نووسین	بە ژمارە	بە جەبر
لۆگارتمی ئەنجامی لێکدانی دوو ژمارە بریتییە لە کۆی لۆگارتمی هەردوو ژمارەکە	$\log_2 32 = \log_2 (4 \times 8) = \log_2 4 + \log_2 8$	$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$
لۆگارتمی ئەنجامی دابەشکردنی ژمارەیەك بەسەر ژمارەیەکی تر بریتییە لە ئەنجامی لێدەرکردنی لۆگارتمی بەشدراو لە بەشکراو.	$\log_7 \frac{16}{3} = \log_7 16 - \log_7 3$	$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$
لۆگارتمی هێزی ژمارەی موجەب بریتییە لە لێکدانی توانی هێزەکە لە لۆگارتمی ژمارەکە.	$\log_{10} 7^3 = 3\log_{10} 7$	$\log_c a^b = b\log_c a$
لۆگارتمی 1 دەکاتە 0 بنچینە کە هەرچەند بێت.	$\log_{10} 1 = 0$	$\log_c 1 = 0$
لۆگارتمی a بە بنچینەی a دەکاتە 1.	$\log_{10} 10 = 1$	$\log_a a = 1$

نموونە 5 هەریەك لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\log_5 75$

ب $\log_4 2 + \log_4 32$

ج $\log_5 500 - \log_5 4$

د $\log_{10} 80 - \log_{10} 40 + \log_{10} 30 - \log_{10} 6$

شیکار

أ $\log_5 75 = \log_5 (3 \times 25) = \log_5 3 + \log_5 25 = \log_5 3 + \log_5 5^2 = \log_5 3 + 2$

ب $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4 (2 \times 32) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3\log_4 4 = 3$

ج $\log_5 500 - \log_5 4 = \log_5 \frac{500}{4} = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

د $\log_{10} 80 - \log_{10} 40 + \log_{10} 30 - \log^{10} 6 = \log_{10} \frac{80 \times 30}{40 \times 6} = \log_{10} 10 = 1$

هەوڵبدە بڕی $\log_9 3 + \log_9 81$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

نموونـــــه

6 ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.

أ $\log_2 x+\log_2 3=\log_2 12$

ب $\log_{10}(2x+3)=1$

شیکار

أ
$$\log_2 x+\log_2 3=\log_2 12$$
$$\log_2 3x=\log_2 12$$
$$3x=12$$
$$x=4$$

ب
$$\log_{10}(2x+3)=1$$
$$\log_{10}(2x+3)=\log_{10}10$$
$$2x+3=10$$
$$x=3.5$$

هەوڵبدە ئەم هاوکێشەیە شیکاربکە. $\log_5 n+\log_5 7=\log_5 35$

ڕاهێـــنـــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 باسی پەیوەندی نێوان بنچینەی هێز و بنچینەی لۆگارتم بکە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

2 چی بەرامبەر توانە لە لۆگارتم؟

لەشێوەی لۆگارتمی بۆ شێوەی توانی بگۆڕە.

3 $\log_3 9=2$

4 $\log_8 2=\frac{1}{3}$

لەشێوەی توانی بۆ شێوەی لۆگارتمی بگۆڕە؟

5 $3^4=81$

6 $7^0=1$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

لەشێوەی لۆگارتمی بۆ شێوەی توانی بگۆڕە.

7 $\log_a a=1$

8 $\log_{10}0.01=-2$

لەشێوەی توانی بۆ شێوەی لۆگارتمی بگۆڕە.

9 $7^1=7$

10 $10^{-3}=0.001$

ئەمانەی خوارەوە هەژماربکە.

11 $\log_2 8$

12 $\log_2 128$

13 $\log_{10}0.00001$

14 $\log_9 9$

بە سادەترین شێوە بنووسە.

15 $\log_2 4+\log_2 8-\log_2 32$

16 $\log_{10}12+\log_{10}\frac{2}{3}-\log_{10}\frac{8}{10}$

بیسەلمێنە کە:

17 $\log_{10} 100 + \log_{10} 18 - \log_{10} 6 - \log_{10} 3 = 2$

18 $\log_a 5 + \log_a 21 - \log_a 7 = \log_a 15$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.

19 $\log_3(2x+3) = 3$ **20** $\log_3\left(x+\frac{1}{5}\right) = -2$ **21** $\log_2(2x+1) = 2$

22 بیری ڕەخنەگر بەهای b چەندە ئەگەر $\log_a b = 0$؟ ڕوونیبکەوە.

23 بیری ڕەخنەگر ئەگەر n ژمارەیەکی تەواوی موجەب بێت، ئایا دەتوانیت $\log_{10} 10^n$ هەژماربکەیت بە ژماردنی سفرەکان لە 10^n ڕوونیبکەوە.

24 بیری ڕەخنەگر ئایا دەتوانی باسی ئەو هۆیە بکەیت کە ڕێگرە لە هەژمارکردنی $\log_0 3$ و $\log_1 3$؟

25 ڕوونیبکەوە کە $\log_7 7^{2x+3} = 2x+3$ پاساو بۆ هەر هەنگاوێك دیاربکە.

ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەم برانە شیتەڵبکە.

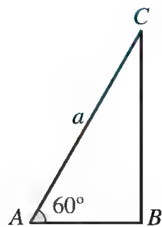
26 $x^3 + 5x^2 + 6x$ **27** $a^6 - 64$ **28** $2x^2 - 11x - 6$

ئەم هاوکێشانە بە ڕێگای گونجاو شیکاربکە.

29 $x^2 - 11x - 6 = 0$ **30** $x^2 + x - 42 = 0$ **31** $3x^2 - 12x + 12 = 0$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

32 درێژی پارچە ڕاستەهێلی BC هەژماربکە.



ئەگەرەکان

Probabilities

بەشی

3

هەژمێرکردنی ئەگەرەکان لقێکە لە لقەکانی بیرکاری، بایەخ دەدات بە خوێندنی دیاردە هەڕەمەکییەکان یان ئەو دیاردانەی کە پێشبینی ئەنجامەکانی ناکرێت. ئەگەری ڕووداو توانای ڕوودانی نیشاندەدات یان جێبجێدەکات، کەچی هەندێك ڕووداو هەنە، ئەگەری ڕوودانیان زۆر بچوکە یان ئەستەمە. لەویش ڕووداوی وا هەیە. ئەگەری ڕوودانەکەی گەورەیە یان دڵنیایە. لەم بەشەدا یاسای بنچینەیی ژماردن بەکاردەهێنیت بۆ دیارکردنی ژمارەی ئەنجامەکە لە توانابووەکان بۆ تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی یان ئەو ئەنجامانەی کە ڕوودانی ڕووداوێك دەربڕێت. (ئەگەر) بەکارهێنانی زۆری هەیە، بە تایبەتی لە کۆمپانیاکانی بارمتە، و دەزگاکانی توێژینەوە، وەك توێژینەوەی پزیشکی وهیتر، ولە جێبەجێکردنی یاساکان، ولە زانستە ڕامیارییەکان.

وانەکان

1. دەروازەیەك بۆ ئەگەر
2. ئەگەرەکان
3. یاسای ژماردنی بنەڕەتی
4. گۆڕینەکان و ڕیزکراوەکان و گونجینەکان.





وانەی 1

دەروازەیەك بۆ ئەگەر

Indroduction To Probability



بۆچی زۆر جار ئەگەرەكان بەبەكارهێنانی شتی ئەوتۆ دەخوێنرێت كە لە ژیانی رۆژانەدا بەكاردێن وەك بەردەزار و پارچە دراوی كانزایی و تیرەكان

ئامانجەكان

- جیاكردنەوەی یەكە تاكەكانی ئەگەر و بەكارهێنانیان بەشێوەیەكی دروست.
- دیاریكردنی كۆمەڵەی ئەنجامە لەبارەكان بۆ تاقی كردنەوەیەكی هەرەمەكی.
- دیاریكردنی ئەو ئەنجامە لەبارانەی كە رووداوێك پێكدێنن.

زۆر جار وشەی ئەگەر دەبیستین یان بەكاری دێنین لە ژیانی رۆژانەماندا. رەنگە لە مامۆستای بیركاری بیبیستیت كە ئەگەری دەرچوونی روان لە بیركاری دا بریتییە لە 80% ، رەنگە لە پێشكەشكاری بلاوكراوەی سەقا بیبیستیت كە ئەگەری باران بارین لە رۆژی داهاتوودا بریتییە لە 50% . لەوانەیە یەكێك بە بیگومانی بلێت كۆمپانیای بارمتە ئەمساڵ قازانج دەكات و یەكێكی تر بلێت كە ئەستەمەهەرگیز بەفر لە مانگی ئاب لە هەولێردا ببارێت.
ئەم رستانە باسی چیدەكەن؟ باسی رووداوی ئەوتۆ دەكەن كە بەتەواوی نازانین ئایا روو دەدەن یان نا، یان رووداوی تر كە لە روودانی دڵنیاین، یان هەرگیز روونادەن. بیركاری یەكێك لە لقەكانی بۆ توێژینەوە دەربارەی ئەم شتانە تەرخان دەكات. كە هەژمێركردنی ئەگەرە بێگومان دەزانیت كە زاناكان تاقیكردنەوەی زانستی وەك تاقیكردنەوەی فیزیایی و كیمیایی و هیتر دەكەن. لەوانەیە مرۆڤ دەستی هەبێت لە ئەنجامی ئەم تاقیكردنەوانە لە میانەی رێكخستنی بابەتەكان و مەرجەكانیان. و رەنگە زاناكە ئەنجامەكان پێشتر بزانیت. بەڵام تاقیكردنەوەی تر هەیە كە ناتوانین پێشەكی ئەنجامەكانی دیاری بكەین. لەكاتی هەڵدانی بەردە زارەكە دیاریدەكەوێت و لە كاتی هەڵدانی پارچە دراوێكی كانزایی، ناتوانیت پێشەكی شێر یان خەت دیاری بكەیت. هەریەك لەم تاقیكردنەوانە پێیدەوترێت تاقیكردنەوەی هەرەمەكی. بیردۆزی ئەگەر لەسەدەی حەڤدەمین دەستیكرد سەری هەڵدا لەسەر دەستی دوو زانای گەورە لە زانایانی، بیركاری فێرما Fermat (1601 - 1665) و باسكال Pascal (1623 - 1662) . ئەم بیردۆزە لە چەرخەكاندا گەشەكرد تا ئەمرۆ بووە لقێكی تەواو لە لقەكانی بیركاری كە لەگەڵ ئامار رۆڵێكی گرنگ دەبینێت لە ژیانی هاوچەرخدا و لە چەندین زانستی تردا بەكاردێت هەر لە فیزیا بۆ كیمیا بۆ زیندوورزانی بۆ نوشداری تاكو ئابووری و بازرگانی و بارمتەكان و هیتر.

Definitions پێناسەکان

لەم وانەیەدا زاراوەکانی ئەگەر دەناسین و فێری چۆنیەتی بەکارهێنانیان دەبین بەشێوەیەکی دروست.
کرداری هەڵدانی بەردەزار بەکاردێنین بۆ هێنانەوەی نموونە بۆ ڕوونکردنەوەی پێناسەکان.

زاراوە	پێناسە	نموونە
کاری هەڕەمەکی **Trial**	کارێکە ناتوانین پێشەکی ئەنجامەکەی دیاربیکەین	هەڵدانی بەردەزارێك
تاقیکردنەوەی (هەڕەمەکی) **Random Experiment**	کارێکی هەڕەمەکی یان دووبارە کردنەوەی کارێکی هەڕەمەکییە	هەڵدانی بەردەزارێك 3 جار
بۆشایی نموونە **Sample Space** S	کۆمەڵەی ئەو ئەنجامانەی کە لە توانادایە بۆ تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی.	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
ڕووداو **Event**	کۆمەڵێکە لە ئەنجامێك یان لەچەند ئەنجامێك پێکدێت کە لە تواناداببێت.	دەرکەوتنی ژمارەیەکی جووت دەرکەوتنی ژمارەیەکی خۆبەش

نموونە 1

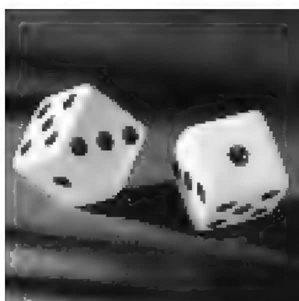
خەسرۆ بەردەزارێکی یەکجار هەڵدا، ئەم ڕووداوانە، بە شێوەی کۆمەڵە، بنووسە.

أ A : دەرکەوتنی ژمارەیەکی تاك

ب B : دەرکەوتنی ژمارەیەکی خۆبەش

ج C : دەرکەوتنی ژمارەیەك لە 5 بچوکتر نەبێت.

د D : دەرکەوتنی ژمارەیەکی خۆبەش یان 4 .



شیکار

أ $A=\{1, 3, 5\}$

ب $B=\{2, 3, 5\}$

ج $C=\{5, 6\}$

د $D=\{2, 3, 5, 4\}$



هەوڵبدە ڕووداوی دەرکەوتنی ژمارەیەك بنووسە توانای دابەشبوونی هەبێت بەسەر 3





نموونە 2

شیرین پارچە دراوێکی کانزایی دووجار هەڵدا. بۆشایی نموونەکە بنووسە.

شیکار

ئەگەر T هێمای شێر و H هیمای خەت بێت، بۆشایی نموونەکە بریتییە لە

$$S = \{(T, T), (T, H), (H, T), (H, H)\}$$

هەوڵبدە ئەو ڕووداوە بنووسە کە هەردوو جار شیرین هەمان ڕووی بۆ دەربچێت.

تێبینی لەکاتی بەکارهێنانمان ژمارەیەك کەمتر نەبێت لە 12 وەك نموونە، مەبەستمان لە ژمارەکە 12 وسەروترە، و ژمارەیەك لە 12 زیاتر نەبێت، مەبەستمان لە ژمارەکە 12 وخوارووترە.

بەرەنگاری بۆشایی نموونەکە بنووسە کاتێك شیرین پارچە دراوەکە 3 جار هەڵبدات.

نموونە 3

شنە گۆیەکی لە سندوقێك راکێشا کە 5 گۆی هاوشێوەی تێدایە، دووانیان سوور و سێیان سەوزن بۆشایی نموونەکە بنووسە.

شیکار

هێمای R_1 و R_2 بۆ دوو گۆیە سوورەکە و هێمای G_1 و G_2 و G_3 بۆ هەرسێ گۆیە سەوزەکە دادەنێن،

بۆشایی نموونەکە بریتییە لە $S = \{R_1, R_2, G_1, G_2, G_3\}$

هەوڵبدە کاروان گۆیەکی لە سندوقێك ڕاکێشا کە 10 گۆی هاوشێوەی تێدایە، 4 ی سوور و 6 ی سەوزن، بۆشایی نموونەکە بنووسە.

نموونە 4

شونی دوو بەردەزاری هەڵدا یەکێکیان سوور و ئەوەیتریان شین بوو، بۆشایی نموونەی ئەم تاقیکردنەوە هەرەمەکییە چییە و ڕووداوی دەرکەوتنی دوو ژمارە سەرجەمیان 10 بێت چییە؟

شیکار

هەروەك لە شێوەی بەرامبەردا دیارە، بۆشایی نموونە لە 36 دانە پێکدێت، هەریەکێکیان جووتە ڕێکخراوێکە ژمارەی دەرکەوتوو لەسەر بەردەزاری سوور ژمارەی دەرکەوتوو لەسەر بەردەزاری شێن دیاردەخات. ڕووداوەکەش لە 3 دانە پێکدێت کە ئەو دانانەن لە شێوەی بەرامبەردا دەورە دراون.

1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6

هەوڵبدە ئەو ڕووداوە بنووسە کە دەستکەوتنی سەرجەمی 14 دەردەبڕێت.

نموونە 5

ڕزگار بەردەزارێکی یەك جار هەڵدا، ئەم ڕووداوانە بنووسە:

1. A : دەرکەوتنی ژمارەیەکی تاك.
2. B : دەرکەوتنی ژمارەیەکی گەورەتر لە 5 .
3. C : دەرکەوتنی ژمارەیەکی بچووکتر لە 1 .
4. D : دەرکەوتنی ژمارەیەکی بچووکتر لە 8 .

شیکار

1. $A=\{1, 3, 5\}$
2. $B=\{6\}$
3. $B=\{\ \}=\phi$
4. $D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

هەوڵبدە ئەو ڕووداوە بنووسە کە ژمارەیەك دەنوێنێت لە 6 بچووکتر بێت و لە 2 بچوکتر نەبێت

ئەنجامەکانی نموونەی ڕابردوو بەکاردێنین بۆ دانانی چەند پێناسەیەك:

نموونە	پێناسە	زاراوە
$B=\{6\}$	ڕووداوێکە ئەنجامێك لە ئەنجامەکانی بۆشایی نموونەکە دەگرێتەخۆ.	ڕووداوی سادە (بنەڕەتی) Simple event
$A=\{1, 3, 5\}$	ڕووداوێکە زیاتر لەئەنجامێك لە ئەنجامەکانی بۆشایی نموونەکە دەگرێتەخۆ.	ڕووداوی ئاوێتە Complex event
$C=\{\ \}=\phi$	ڕووداوێکە هیچ ئەنجامێك ناگرێتەوە لەتواناداابێت.	ڕووداوی ستەم Impossible event
ڕووداوی $D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	ڕووداوێکە هەموو ئەنجامەکان دەگرێتەوە کە لەتواناداابێت.	ڕووداوی دڵنیایی Certain event
هەردوو ڕووداوی $A=\{1, 3, 5\}$ $B=\{6\}$	دوو ڕووداون هیچ ئەنجامی هاوبەشیان لە نێواندا نییە کە لە تواناداابێت.	ڕووداوی جیا Mutually exclusive events

هەوڵبدە دوو ڕووداوی جیا بڵێ لە تاقیکردنەوەی هەڵدانی بەردەزارێك.

ڕووداوی تەواوکەر Complementry event

ئەگەر لەدوو ڕووداوی جیادا ڕووداوێکیان هاتەدی، ئەوا ڕووداوەکەی تر نایەتەدی، ئەمەش ئەوە ناگەیێنێت کە یەکێکیان دێتە دی. بۆ نموونە:
لەکاتی هەڵدانی بەردە زارێك هەردوو ڕووداوی $A=\{1,2,3\}$، $B=\{6\}$ کە دوو ڕووداوی جیان، ئەوا لە دەرکەوتنی 2 هیچ کام لە A یان B نایەنەدی.

دەڵێین ڕووداوی A ڕووداوی تەواوکەرە بۆ ڕووداوی B ئەگەر A لەگشت ئەو ئەنجامانە پێکبێت کە لە توانادایە و سەر بە B نییە ئەمە ئەوە دەگەیێنێت دوو ڕووداوەکە جیان و یەکێکیشیان هەر ڕوودەدات هێمای $\overline{B}$ بەکاردێنین بۆ دەربڕینی ڕووداوی تەواوکەری ڕووداوی B .

نموونە 6 **لەکاتی هەڵدانی بەردەزارێك ڕووداوی تەواوکەری ڕووداوی A چییە؟ ئەگەر A بریتیی بێت لە ڕووداوی دەرکەوتنی ژمارەی تاك؟**

شیکار

بۆشایی نموونەکە بریتییە لە$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ =S و ڕووداوەکە بریتییە لە $A=\{1, 3, 5\}$
ڕووداوی تەواوکەر بریتییە لە$\overline{A}=\{2, 4, 6\}$ واتە دەرکەوتنی ژمارەی جووت.

هەوڵبدە لەکاتی هەڵدانی دوو بەردەزاری دوو ڕەنگ جیاواز ئەگەر A ڕووداوی دەرکەوتنی دوو ژمارە بێت سەرجەمیان 10 بێت، ئایا ڕووداوی تەواوکەری ڕووداویA چییە؟

دەتوانین ڕووداوی نوێ دروست بکەین لە چەند ڕووداوێك کە لامان هەیە بۆ نموونە ئەگەر A، B دوو ڕووداو بن لە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی ئەوا هێمای $A\cap B$ دادەنێین بۆ ڕووداوی A و B کە دێتە دی تەنیا ئەگەر هەردوو ڕووداو پێکەوە ڕووبدەن هەروەها هێمای $A\cup B$ دادەنێین بۆ ڕووداوی A یان B . کە دێتەدی ئەگەر بەلایەنی کەمەوە یەکێك لەدوو ڕووداوەکە ڕووبدەن.

نموونە

7 بەردەزارێك یەكجار هەڵدرا هەردوو ڕووداوی $A=\{1, 3, 5\}$ و $B=\{2, 3, 4\}$ بەكاربێنە بۆ نووسینی هەریەكە لەم ڕووداوانە:

.1 $\overline{A}$

.2 $A \cup B$

.3 $A \cap B$

شیكار

.1 $\overline{A}=\{2, 4, 6\}$

.2 $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

.3 $A \cap B=\{3\}$

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیركاریدا

1 هەریەك لەم دوو هێمایە $\cap$ و $\cup$ چ مانایەكت پێدەبەخشێت؟ لە دوو نموونەدا بەكاریان بێنە كە ڕووداویان تێدابێت.

2 چۆن $A \cup B$ و $A \cap B$ دەدۆزیتەوە ئەگەر $A=\{1, 2, 3, 4\}$ و $B=\{2, 4, 6\}$؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەكراو

3 سندوقێك 5 پەپكی هاوشێوەی تێدایە 3 یان ڕەش و دووانیان سپین بۆشایی نموونەی هەر تاقیكردنەوەیەكی هەرەمەكی بنووسە.

أ ڕاكێشانی یەك پەپك　　ب ڕاكێشانی دوو پەپك　　ج ڕاكێشانی 3 پەپك.

4 سامان پارچە دراوێكی كانزایی 3 جاری یەك لەدوای یەك هەڵدا بۆشایی نموونەی ئەم تاقیكردنەوەیە بنووسە.

5 5 پارچەكاغەزی ڕەنووسكراو لە 1 تا 5 لەناو تورەگەیەكی ناڕوون دانرا یەك كاغەز بە هەرەمەكی ڕاكێشرا هێمای A دابنێ بۆ ڕووداوی هەڵگرتنی كاغەزە ڕاكێشراوەكە بۆ ژمارەیەك لە 4 كەمتر نەبێت و B بۆ ڕووداوی هەڵگرتنی كاغەزە ڕاكێشراوەكە بۆ ژمارەیەك لە 3 كەمتر نەبێت ئەم ڕووداوانە بنووسە:

$\overline{A} \cap \overline{B}, A \cap B, A \cup B, \overline{A}, B, A$

6 لەكاتی هەڵدانی بەردەزارێك ئاری هێمای A بۆ ڕووداوی (دەركەوتنی ژمارەیەكی جووت) و B بۆ ڕووداوی (دەركەوتنی ژمارەیەكی خۆبەش) و C بۆ ڕووداوی (دەركەوتنی ژمارەیەكی تاك) و D بۆ ڕووداوی (دەركەوتنی ژمارەیەكی بچووكتر لە 7) دانا.

أ هەموو ڕووداوەكان بنووسە.

ب ئایا لەنێو ڕووداوەكاندا دوو ڕووداوی جیا هەیە؟ دوو ڕووداوی جیا بڵێ ئەگەر وەڵامت بەڵێ بوو.

ج ئەم ڕووداوانە بنووسە: $A \cup B$ و $A \cap B$ و $C \cap D$.

7 خوێندکارانی پۆلی دەیەم بۆ چاوپێکەوتنێك لەگەڵ بەرپرسێك لە نێوان ٣ کەس دا:
شیروان وهاوڕێ ومحەمەد دوو کەسیان هەڵبژارد، بۆشایی نموونەکە بنووسە، ئایا هەر دانەیەك لە جووتە ڕێکخراوێك پێكدێت؟ ڕوونیبکەوە.

8 پێویستە چەند ژمارەیەکی دوو ڕەنووسی لە ڕەنووسەکانی 1 و 2 و 3 پێکبهێنرێت، بۆشایی نموونەکە بنووسە ئایا هەردانەیەك لە جووتە ڕێکخراوێك پێکدێت؟ ڕوونبکەرەوە.

9 داواکراوپێکهێنانی لێژنەیەکی سێ کەسی لەنێو خوێندکاران سامان و بروا و هونەر و باران و لەیلا و نەسرین بۆشایی نموونەکە بنووسە ئەگەر:

أ پێویست بێت لێژنەکە بەلایەنی کەم کچێکی تێدابێت.

ب پێویست بێت لێژنەکە بەلایەنی زۆر کچێکی تێدابێت.

10 سەوسەن دوو بەردەزاری ڕەنگ جیاوازی هەڵدا ئەم ڕووداوانە بنووسە.

أ دەرکەوتنی هەمان ژمارە لەسەر هەردوو بەردەزارەکە.

ب دەرکەوتنی دوو ژمارە سەرجەمیان 5 بێت.

ج دەرکەوتنی ژمارە 3 بەلایەنی کەم لەسەر یەکێك لە دوو بەردەکان.

11 ڕووداوی دەرکەوتنی دوو ژمارە سەرجەمیان 9 بێت لەکاتی هەڵدانی دوو بەردەزاری ڕەنگ جیاواز بنووسە

لەبیرت بێت ژمارەکان لە ڕەنووسەکان پێکدێن هەروەك کە وشەکان لە پیتەکان پێکدێن ڕەنووسەکان لە سیستمی دەیی لە 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 پێك دێن و ژمارەیان دەیە.

ڕوانینێك بۆ دواوە

12 چۆن $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ بەسادەترین شێوە دەنووسێت.

13 چۆن $\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+...+\frac{1}{36}$ و 36 جار، بەسادەترین شێوە دەنووسیتەوە؟

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

14 کەسێك هەڵبژێرردا لەنێو خوێندکارانی پۆلێك لە 13 کچ و 26 کوڕ پێك هاتبوو بۆ ئەوەی ببێتە نوێنەری پۆل. ئەگەری ئەوەی نوێنەرەکە کچ بێت چەندە؟



ئەگەر Probability



ئامانجەکان

- ئەگەری تیۆری و ئەگەری تاقیکردنەوەیی دەناسێت.
- ئەگەری ڕووداو هەژماردەکات.
- ئەگەری تەواوکەر دەناسێت و هەژماری دەکات.

چۆن هەندێك کۆمپانیای بازرگانی کە کارەکانی بەستراوە بە هەندێك کاروبار کە لە تواناادا نییە پێشبینی ڕوودانی بکرێت وەك کۆمپانیاکانی بارمتە دەتوانێت قازانج بکات؟ وەڵامەکە لەوەدایە کە دەکرێ هەندێ توانست بدۆزێتەوە یان ئەگەری ڕوودانی کارێك لەمیانەی چاودێری کردنی ئەنجامی ژمارەیەکی زۆر لە بارەکانی دەبێتە هۆی ڕوودانی بۆ نموونە: لەوانەیە ئەگەری مردنی مرۆڤێکی کە هۆگری جگەرەکێشانە دیاریکرێت لە میانەی چاودێری کردنی ڕێژەی ئەوانەی بەهۆی هۆگری جگەرە دەمرن.

نموونە 1

ئەگەری چەندە کە نەخۆشێکی شێرپەنجەی سییەکان چاکببێتەوە ئەگەر زانیت کە توێژینەوەیەك لەسەر 5000 کەس کرابێت. لەوانە 250 کەسیان چاکبوونەوە.

شیکار

دەتوانیت بۆشایی نموونەکە بە 5000 کەس دابنرێت لەوانە $5000 - 250 = 4750$ چاکنەبوونەوە دەنوێنێت، بەمەش ئەگەری چاکبوونەوە دەبێتە:

$$\frac{250}{5000} = \frac{1}{20} = 0.05 = 5\%$$

هەوڵبدە ئەگەری چاکنەبوونەوەی نەخۆشەکە چەندە؟

نموونە 2

دونیا بەردەزارێکی هەڵدا ئەگەری دەرکەوتنی یەکێك لە چەند جارەکانی 3 چەندە؟

شیکار

بۆشایی نموونەکە بریتییە لە $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ڕووداوەکە ڕوودەدات ئەگەر دونیا 3 یان 6 ی بۆ دەرچێت، واتە ڕووداوەکە بریتییە لە $\{3, 6\}$ بەمەش دەردەکەوێت کە ئەگەری هاتنەدی داواکراو بریتییە لە $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.3333 = 33.33\%$.

هەوڵبدە ئەگەری دەرکەوتنی 1 یان ژمارەیەکی گەورەتر لە 3 چەندە؟

دوو نموونەی پێشوو دوو ڕێگای هەژمێرکردنی ئەگەرمان بۆ دەستنیشان دەکات.

ڕێگای یەکەم

ئەم ڕێگایە بەندە لەسەر هەژمارکردنی ئەگەری ڕووداوێك لە ڕێگای دووبارەکردنەوەی تاقیکردنەوەکە(زۆری ژمارەی بارەکانی شێرپەنجە توێژینەوەی لەسەرکراوە) و تۆمارکردنی ئەنجامی هەربارێك (چاکبوونەوە یا نا) ئەگەری ڕووداوی (چاکبوونەوە) لەم ڕێگایەدا بە ئەنجامی تاقیکردنەوە دووبارەبووەکان دیاردەکرێت و بەکەرتێك دەردەبرێت کە سەرەکەی ژمارەی ئەو بارانەیە کە ڕووداوەکەی تێدادێتەدی (بارەکانی چاکبوونەوە) ژێرەکەی ژمارەی هەموو بارەکانە بەم جۆرە ئەگەرە دەوترێت ئەگەری

تاقیکردنەوەیی Experimental Probability

ڕێگای دووەم

ئەم ڕێگایە بەندە لەسەر هەژمێرکردنی ئەگەری ڕووداوی ڕووداوەکە کە (دەستکەوتنی یەکێك لەچەندجارەکانی ژمارە 3) بەشێوەی تیۆری بەبێ ئەنجامدانی تاقیکردنەوەی (هەڵدانی بەردەزار) ئەگەری ڕووداوەکە (دەستکەوتنی یەکێك لەچەندجارەکانی ژمارە 3) لەم ڕێگایەدا پێشەکی دیاردەکرێت و بەکەرتێك دەردەبرێت سەرەکەی ژمارەی ئەو ئەنجامانەی کە ڕووداوەکە دێنێتەدی (دوو ئەنجام کەبریتیین لە 3 و 6) و ژێرەکەی بریتییە لە ژمارەی هەموو ئەو ئەنجامانەی لە تواناداپە(6)بەم جۆرە ئەگەرە دەوترێت

ئەگەری تیۆری Theoritical Probability

بەرەنگاری دڵدار گۆیەکی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 4 گۆی سوور و 7 گۆی ڕەشی تێدابوو. ئەگەری ئەوەی گۆیە ڕاکێشراوەکە شین بێت چەندە؟

بەرەنگاری دڵدار گۆیەکی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 4 گۆی سوور و 7 گۆی ڕەشی تێدابوو، لەنێو ڕووداوەکانی ئەم تاقیکردنەوە هەڕەمەکییە، ڕووداوێکی دڵنیا دیاربکە.

ئەگەر Probability

بەگەڕانەوە بۆ تاقیکردنەوەی هەڵدانی بەردە زارەکە:

- دەتوانین هەموو ڕووداوە سادەکان دیاربکەین کە ئەمانەن $A=\{1\}$ و $B=\{2\}$ و $C=\{3\}$ و $D=\{4\}$ و $E=\{5\}$ و $F=\{6\}$ (لەبیرت بێت کە ڕووداوی سادە تەنیا لەیەك ئەنجام پێکدێت کە لەتواناداپێت).
- هەموو ئەو ڕووداوانە لە ئەگەردا یەکسانن .
- سەرجەمی ئەگەرەکانی ڕووداوە سادەکان یەکسانە بە 1 .

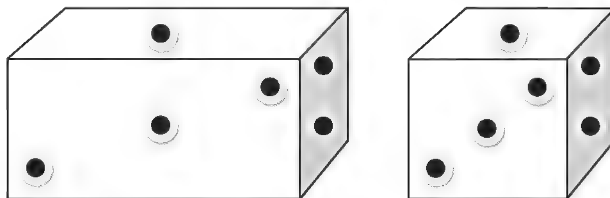
ئەگەر Probability

ئەگەری ڕووداوێك A دەپێورێت و دەنووسرێت $P(A)$ بەژمارەیەکی ڕاستی کە دەکەوێتە نێوان 0 و 1 واتە $0 \le P(A) \le 1$، ئەگەر ڕووداوی A ئەستەم بێت ئەوا ئەگەرەکەی $P(A)=0$.

ئەگەر ڕووداوی A دڵنیایی بێت ئەوا ئەگەرەکەی $P(A)=1$.

سەرجەمی هەموو ئەنجامی ئەگەوەکانی لەتواناداپوو بریتییە لە 1 .

دەربارەی تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی دەڵێین ئەنجامەکانی سنووردرواوە ئەگەر ژمارەی ئەنجامە لە توانابووەکانی سنووکراوبن ئەوا بۆشایی نموونەکە لەم بارەدا لە ژمارەیەکی دیاریکراو لە دانە پێکدێت.



نموونە 3

سامان بەردەزێکی هەڵدا، و سەیرانی خوشکیشی بەردەزێکی شێوە لەگۆڕاندا هەڵدا کە شێوەکەی کرابوو بە رووالاکێشە تەریب لەجیاتی شەشپاڵو وەکو لە وێنەی سەرەوە دیارە هەریەک لەبەردەزارەکان لە 1 بۆ 6 ژمارەنووسکراون ئایا گۆڕینی بەردەزاری سەیران بۆشایی نموونەکە دەگۆڕێت ئایا ئەگەری هەموو ئەنجامەکانی دەگۆڕێت کە لەتوانادایە؟

شیکار

گۆڕینی شێوەی بەردەزاری سەیران بۆشایی نموونەکە ناگۆڕێت کە لە هەردوو تاقیکردنەوەدا بریتییە لە $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ بەڵام ئەگەری هەموو ئەنجامە لەتوانابوەکان دەگۆڕێت. ئەنجامەکان لە تاقیکردنەوەی سامان یەکسانن لەبەر یەکسانبوونی ڕوو ڕووبەرەکان بەڵام لە تاقیکردنەوەی سەیران یەکسان نین لەبەر جیاوازی ڕوو ڕووبەرەکانی لاکێشە تەریبەکە.

بە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی دەڵێین رێکە **Equiprobable** ئەگەر تیایدا ئەگەرەکانی ئەنجامەکان کە لە توانادایە یەکسان بن.

Theoritical Probability ئەگەری تیۆری

ئەگەر تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی سنووردار و رێکبوو ئەوا ئەگەری ڕووداوێک A لە ڕووداوەکانی بریتییە لە ژمارەی ڕاستی:

$$P(A)=\frac{\text{ژمارەی ئەنجامەکانی کە پاسدانی ڕووداوەکە دەکەن}}{\text{ژمارەی هەموو ئەنجامەکانی کە لە توانادایە}}$$

نموونە 4

مەروان پەپكێكی كۆمپيوتەری لە قوتوويەك ڕاكێشا كە دوو پەپكی سوور و 4 پەپكی شين و 3 پەپكی زەردی تێدابوو ئەگەر چەندە كە پەپكە ڕاكێشراوەكە زەرد بێت؟



شيكار

ئەم تاقيكردنەوەيە هەڕەمەكی و دياريكراو ڕێكە بۆشايی نموونەكەی

بريتييە لە: $S=\{R_1, R_2, B_1, B_2, B_3, B_4, Y_1, Y_2, Y_3\}$

با R هێما ڕەنگی سوور و B ڕەنگی شين و Y ڕەنگی زەرد بێت

ديارە 3 ئەنجام ڕووداوەكە دێنێتەدی لەنێو 9 ئەنجامەكە لە تواناداںبوو.

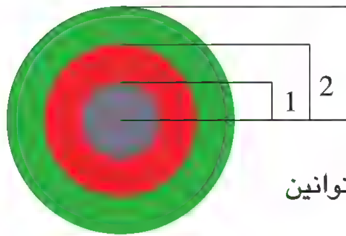
بۆيە ئەگەری ئەوەی پەپكە ڕاكێشراوەكە زەرد بێت بريتييە لە 3 لە 9 يان $P(Y)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

هەوڵبدە: هاوڕێ پەپكێكی كۆمپيوتەری لە قوتوويەك ڕاكێشا كە 3 پەپكی سوور و 5 پەپكی شين و 7 پەپكی زەردی تێدابوو، ئەگەر چەندە كە پەپكە ڕاكێشراوەكە شين بێت؟

چۆن ئەگەرەكانی تاقيكردنەوەيی هەڕەمەكی ديارينەكراو هەژماردەكەين؟ وەڵامەكانمان تەنيا لە بواری تاقيكردنەوە هەڕەمەكييە ڕێكەكان دەبێت دوو جۆر لەم بارانە دەخوێنين.

نموونە 5

فەيرۆز تيرێكی هاوێشت وله پەپكە بازنەييە دارەكەيدا كە بەديوارەوە هەڵوسراوەوە. ئايا ئەگەری ڕووداوی B چەندە كە بريتييە لەوەی تيرەكە ناوچە سەوزەكە بپێكێت؟



شيكار

هەر خاڵێك لە خاڵەكانی پەپكە بازنەييە كە ئەنجامێك دەنوێنێت كە لە تواناداية. لەكاتێكدا ئەو خاڵانەی ڕووداوی B بەديدێنن بريتين لە خاڵەكانی ناوچە سەوزەكە. لەبەر ئەوەی ناتوانين ژمارەی ئەنجامەكان بدۆزينەوە كە لە تواناداںن و ژمارەی ئەو ئەنجامانەی كە ڕووداوەكە دێننە دی، بۆيە ڕووبەری ئەو ناوچەيەی كە خاڵەكانی ڕووداوەكە پێكدەهێنن واتە ناوچە سەوزەكە، دابەشی ڕووبەری ئەو ناوچەيە دەكەين كە خاڵەكانی بۆشايی نموونەكە پێكدەهێنن واتە ڕووبەری هەموو تەختەكە.

$$P(B)=\frac{\text{ڕووبەری ناوچە سەوزەكە}}{\text{ڕووبەری هەموو ناوچەكە}}$$

$$P(B)=\frac{\pi(3)^2-\pi(2)^2}{\pi(3)^2}=\frac{5\pi}{9\pi}=\frac{5}{9}=0.556=55.6\%$$

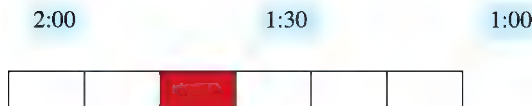
هەوڵبدە: ئەگەر چەندە كە تيرەكە ناوچە سورەكە بپێكێنێت.

نموونە 6

هەموو ڕۆژێ كەماڵ لە نێوان كاتژمێر 1:00 و 2:00 ی پاش نيوەڕۆ سەيری پۆستە ئەليكترۆنييەكەی دەكات. ئايا ئەگەری ڕووداوی E چەندە كە ئەنجامدانی كارەكە دەنوێنێت لەنێوان كاتژمێر 1:30 و 1:40 ؟

شيكار

بۆشايی نموونەكە لە هەر ساتێك پێك دێت لە نێوان 1:00 و 2:00 لە كاتێكدا ڕووداوەكە بريتييە لە كۆمەڵەی ساتەكانی نێوان 1:30 و 1:40 بۆ هەژمێركردنی ئەگەری ڕووداوی E ماوەی نێوان 1:00 و 2:00 بۆ چەند ماوەيەكی 10 خولەكی بەشدەكەين (درێژی ماوەی نێوان 1:30 و 1:40).



ماوە سوورەکە ڕووداوەکە دەنوێنێت کەواتە، ئەگەری ڕووداوەکە بریتییە لە یەك ماوە لە نێوان 6 ماوەی یەکسان واتە

$$P(E)=\frac{1}{6}\approx 0.167\approx 16.7\%$$

هەوڵبدە ئەگەر چەندە کە کارەکە لە نێوان 1:30 و 1:35 ئەنجامبدات؟

ئەگەری ڕووداوی تەواوکەر Probability of the Complement of an event

نموونە 7 ئەگەر B بریتی بێت لە ڕووداوی دەرکەوتنی ژمارەیەك گەورەتر نەبێت لە 2 لەکاتی هەڵدانی بەردەزارێك، ئەوا ڕووداوی تەواوکەر $\overline{B}$ بنووسە وئەگەرەکەی هەژماربکە. پەیوەندی نێوان ئەگەری ڕووداوی B وئەگەری ڕووداوی تەواوکەر $\overline{B}$ چییە؟

شیکار

$$B=\{1,2\}\quad \overline{B}=\{3,4,5,6\}$$

$$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\quad P(\overline{B})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

ئەوە تێبینی دەکەین $P(B)+P(\overline{B})=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$ یان $P(\overline{B})=1-P(B)$.

دەبینین لە ڕاستیدا ئەو ئەنجامەی کە لە نموونەی ڕابردوودا پێگەیشتین دەربارەی پەیوەندی نێوان ئەگەری ڕووداوێك B وئەگەری ڕووداوی تەواوکەر $\overline{B}$ ئەنجامێکی گشتییە وەدەتوانرێت لەهەر تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی بەکاربهێنرێت.

نموونە 8 سندوقێك 52 کاغەزی هاوشێوەی تێدایە، 10 سوور و 12 شین و 14 سپی و 16 سەوزە. سیروان کاغەزێکی ڕاکێشا وگەڕاندیەوە ناو سندوقەکە پاشان کاغەزێکی تری ڕاکێشا. ئەگەری ڕووداوی B کە کاغەزی یەکەم شین بێت وڕووداوی O کە کاغەزی دووەم شین نەبێ چین؟

شیکار

بۆشایی نموونە لە 52 دانە پێك دێت چونکە ڕاکێشانی هەر کاغەزێك ئەنجامێکی لەتوانادابوو دەنوێنێت و ڕووداوی B لە 12 دانە پێکدێت چونکە هەر کاغەزێك لە 12 کاغەزە شینەکە ئەنجامێك پێکدێنێت کە ڕووداوەکە دێنێتەدی.

$$P(B)=\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$$

بەهەمان ڕێگا دەتوانیت ئەگەری ڕوداووی O بدۆزیتەوە. ڕووداوی O کە هەموو کاغەزە سوور وسپی وسەوزەکان پێکدێنێت واتە لە 40 دانە پێکدێت کەواتە

$$P(O)=\frac{40}{52}=\frac{10}{13}$$

بەڵام دەتوانیت سەرەنجی ئەوە بدەیت کە ڕووداوی O بریتییە لە تەواوکەری ڕووداوی B وئەگەرەکەی بەم جۆرە هەژمێر دەکەیت:

$$P(O)=1-P(B)=1-\frac{3}{13}=\frac{10}{13}$$

بەرەنگاری چ گۆڕانێك لە ئەنجامی نموونەی پێشوو ڕوودەدات ئەگەر سیروان کاغەزی یەکەم نەگەڕێنێتەوە ناو سندووقەکە پێش ڕاکێشانی کاغەزی دووەم؟

نمـــوونـــــه

9 فەرهاد بەردەزارێکی سەیری هەیە، لە 1 تا 6 ڕەنووسکراوە،ئەگەری دەرکەوتنی هەر ژمارەیەك تیایدا جگە لە 1 بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی ئەو ژمارەیە لە ئەگەری دەرکەوتنی 1 ئەگەری دەرکەوتنی هەریەك لە شەش ژمارەکە چەندە؟

شیکار

بە پێی پێدراوەکانی پرسیارەکە دەتوانیت ئەمانەی خوارەوە بنووسییت:

$P(6)=6P(1) \quad P(5)=5P(1) \quad P(4)=4P(1) \quad P(3)=3P(1) \quad P(2)=2P(1)$

لەبەر ئەوەی سەرجەمی ئەگەرەکانی هەموو ئەنجامە لە تواناداوبوەکان یەکسانە بە 1 ئەوا دەتوانین بنووسین کە:

$$\begin{aligned}1&=P(1)+P(2)+p(3)+p(4)+P(5)+P(6)\\&=P(1)+2P(1)+3P(1)+4P(1)+5P(1)+6P(1)\\&=(1+2+3+4+5+6)P(1)\\&=21P(1)\end{aligned}$$

لەدواییشدا: $P(1)=\frac{1}{21} \quad P(2)=\frac{2}{21} \quad P(3)=\frac{3}{21} \quad P(4)=\frac{4}{21} \quad P(5)=\frac{5}{21} \quad P(6)=\frac{6}{21}$

هەوڵبدە ئەگەری دەرکەوتنی ژمارەیەکی خۆبەش لە نموونەی ڕابردوودا چەندە؟

ڕاهێـــــنـــان

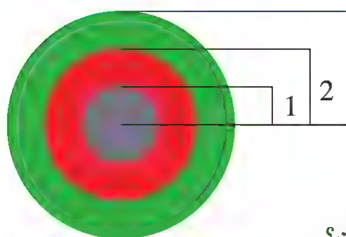
بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئەگەری کەوتنی نەبەز لە تاقیکردنەوەی بیرکاریدا چەندە ئەگەر ئەگەری دەرچوونی 90% بێت؟

2 ڕوونبکەرەوە چۆن ڕووبەرەکان لە هەژمارکردنی ئەگەرەکان بەکاردێنیت.

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

3 کارزان گۆیەکی شووشەیی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 5 گۆی شین و 3 گۆی سوور ،گۆیەکی سپی تێدابوو،ئەگەر چەندە کە گۆیە ڕاکێشراوەکە سوور بێت؟



4 لە یلا تیرێکی هاوێشتە تەختەیەکی داری هەڵواسراو بەدیوارێکەوە ئەگەر چەندە کە تیرەکە ناوچە شینەکە بپێکێت؟

5 دڵشاد ڕۆژانە لە کاتژمێر حەوت تا هەشتی بەیانی سەیری پۆستە ئەلیکترۆنییەکەی دەکات. ئەگەر چەندە کاتێك کارکە لە ماوەی 7:30 و 7:45 ئەنجامبدات؟

6 کۆمەڵەیەکی خێرخواز بلیت ڕاکێشانێك ڕێکدەخەن لە پێناو دابینکردنی بوودجە بۆ چالاکییەکانیان، بلیتەکان لە ژمارە 0000 تا ژمارە 9999 ڕەنووسکراوبوون.ئەگەر چەندە کە ژمارەی بلیتی دەرچوو بە ڕەنووسی 3 دەستپێبکات وبە ڕەنووسی 2 یان 1 کۆتایی بێت؟

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

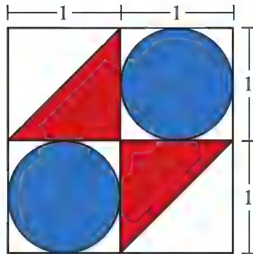
تورەگەیەک 3 بلیتی سپی و 2 بلیتی ڕەش 5 بلیتی سووری تێدایە، هەموو بلیتەکان هاوشێوەن ڕێبوار بلیتێکی ڕاکێشا ئەگەر کە چییە کە بلیتە ڕاکێشراوەکە:

7 سپی بێت 8 ڕەش بێت 9 سوور بێت

پاسێك لە نێوان کاتژمێر هەشت و هەشت و 5 خولەکی بەیانی دەگاتە وێستگەی نزیك ماڵی سامان.ئەگەر چەندە هاوڕێ سواری پاسەکە بێت ئەگەر لەم کاتانە گەیشتە وێستگەکە:

10 8:04 11 8:02 12 8:01 13 8:03

ئەندازە سامی تیرەکانی دەگرێتە تەختەیەکی داری وەك ئەوەی لە شێوەی بەرامبەردا دیارە.ئەگەری هەریەك لەم ڕووداوانە هەژمێر بکە:



14 تیرەکە ناوچە بازنەییەکە بپێکێت.

15 تیرەکە یەکێك لە دوو سێگۆشە سوورەکە بپێکێت.

16 تیرەکە یەکێك لە دوو سێگۆشە سپییەکە بپێکێت.

17 تیرەکە ناوچە سپییەکە بپێکێت.

جێبەجێکردن

دیموگرافیا خشتەی خوارەوە ژمارەی دانیشتوان جگە لە منداڵ لە شارێك پیشاندەدات، بە پێی تەمەن ورەگەز.

تەمەن	نێر	مێ
17 – 14	38	39
19 – 18	1 224	1 416
21 – 20	1 294	1 414
24 – 22	1 260	1 263
29 – 25	950	1 058
34 – 30	661	811
35 بەرەوژوور	955	1 824

یەکێك لە دانیشتووان بەهەڕەمەکی هەڵبژێردرا، ئەگەر چەندە کە تەمەنی ئەو کەسە لەم چەشنە دابێت؟

18 24-18 19 29-25 20 34-30 21 30 بەرەوژوور

22 ئەگەری هەریەك لەم ڕووداوانە هەژمێربکە لە کاتی هەڵدانی دوو بەردەزاری ڕەنگ چیا:

أ دوو ژمارە دەرکەوتووەکە یەکسان بن.

ب سەرجەمی دوو ژمارە دەرکەوتووەکە 12 بێت.

ج بەلایەنی کەم ژمارە 3 لەسەر یەکێك لە دوو ڕووەکە دەردەکەوێت.

د سەرجەمی دوو ژمارە دەرکەوتووەکە لە 5 کەمتر بێت.

23 نوێنەری پۆلێك هەڵبژێردرا كە لە 8 كچ و 12 كوڕ پێكدێت. ئەگەر چییە:

أ نوێنەرەكە كوڕبێت.

ب نوێنەرەكە كچ بێت؟

ج نوێنەرەكە كچ بێت ئەگەر دوو كوڕ وكچێك ئارەزووی خۆنە پاڵاوتنیان دەربڕی؟

24 لە پرسیاری پێشوو، كەی ئەگەری ئەوەی نوێنەرەكە كوڕ بێت یان كچ یەكسان دەبن؟

25 تاقیكردنەوەیەكی هەڕەمەكی سێ ئەنجامی لە تواناداببووی تێدایە كە ئەمانەن A,B,C ئەگەر $P(A)=0.2$ ، $P(B)=0.5$ ، ئەوا $P(C)$ بدۆزەرەوە.

تێروانینێك بۆ دواوە

26 بۆشایی نموونەی تاقیكردنەوەی هەڵدانی پارچەدراوێكی كانزایی 3 جاری یەك لە دوای یەك بنووسە.ڕووداوی A بنووسە كە بریتییە لە دەركەوتنی هەمان ڕوو لەهەر سێ جاردا.

27 ئەم ڕووداوانە بنووسە لە تاقیكردنەوەی هەڵدانی دووبەردەزاری ڕەنگ جیاواز:

أ دوو ژمارە دەركەوتووەكە یەكسان بن.

ب سەرجەمی دوو ژمارە دەركەوتووەكە خۆبەش بێت.

ج سەرجەمی دوو ژمارە دەركەوتووەكە ژمارەیەكی جووتی گەورەتر بێت لە 2 .

28 ئایا لە نێو ڕووداوەكانی پرسیاری 27 دوو ڕووداوی جیا هەیە، ئەگەر هەیە چین؟

29 تەواوكەری ڕووداوی A لە پرسیاری 26 چەند چەند دانەی تێدایە؟

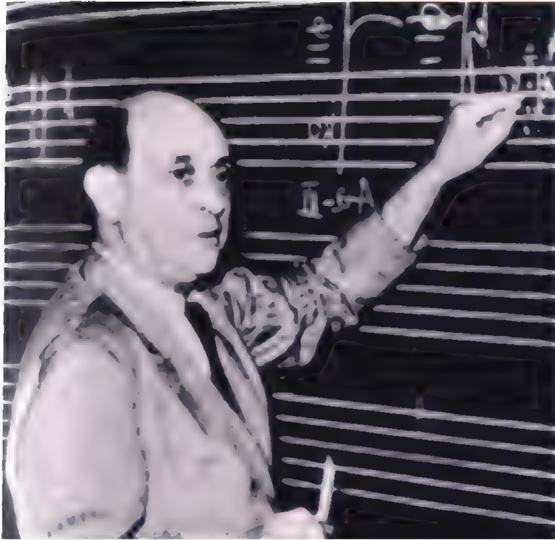
تێروانینێك بۆ پێشەوە

30 كاڵێ دوو گۆی پێكەوە لە تووركەیەك ڕادەكێشێ كە 5 گۆی تێدابوو، 3 سوور و 2 سپی.ئەگەر چییە هەردوو گۆ سوور بن؟



یاسای ژماردنی بنەڕەتی

Fundamental Counting Principle



ئامانجەکان

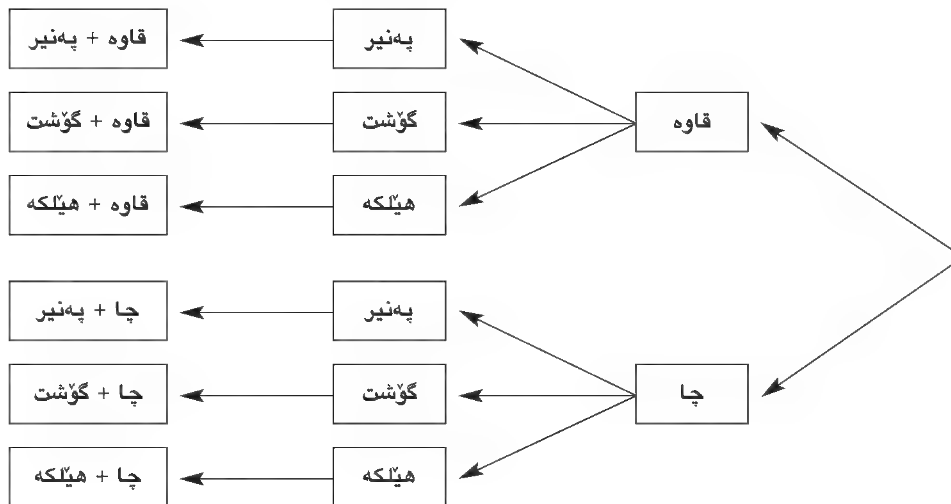
- بۆ نواندنی بارێك هێلکاری درەخت دروستدەکان.
- یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاردەهێنێت.

بۆچی زۆرجار ڕێگایەکمان پێویستدەبێت بۆ ژماردنی هەندێك ئەنجام لە تاقیکردنەوەیەکدا

لەوانەی پێشووبینیمان کە هەژمێرکردنی ئەگەری ڕووداوێك لە ڕووداوەکانی تاقیکردنەوەیەکی دیاریکراو پێویستی بە دۆزینەوەی هەموو ئەنجامەکان دەبێت کە لە تواناناداىە وهەموو ئەو ئەنجامانەی لە توانا دان بۆ هاتنەدی ڕووداوەکە. لەم وانەیە ولەوانەی داهاتوودا چەند ڕێگاکانی ژماردن فێردەبین کە یارمەتیدەرن لە ژماردنی ئەوەی ئارەزووی ژماردنیمان هەبێت.

یاسای ژماردنی بنەڕەتی Fundamental Counting Principle

ڕێگای یەکەم فێری دەبین بریتییە لە بەکارهێنانی هێلکاری درەخت. بۆ نموونە ژەمی بەیانی لە یەکێك لە ئوتێلەکان وەربگرە هەرکەسێك بۆی هەیە هەڵبژاردن لە نێوان چا وقاوە بکات لە لایەك ولە نێوان سێ جۆرە خواردن: پەنیر یان گۆشت یان هێلکە لە لایەکی تر. هێلکاری خوارەوە هەموو ڕێگاکان پیشاندەدات کە لە تواناداىە بۆ هەڵبژاردنی ژەمی بەیانی.



چالاکی

دۆزینەوەی هێلکاری درەخت Exploring Tree Diagram

چێشتخانەیەك دوو جۆرە ژەمی ئێوارە دەخاتە روو بۆ میوانانی هەر ژەمێك لە قاپێك زەلاتە وقاپێك گۆشت پێكدێت هەركەسێك دەتوانێت هەڵبژاردن لە نێوان دوو جۆر سەڵاتە بكات. سەڵاتەی كاهوو و زەلاتەی تەماتە. هەروەها دەتوانێت هەڵبژاردن لە نێوان سێ جۆرە گۆشت بكات: برژاو یان سووركراوە یان مریشك.

1. سەرەتا هێلکارییەکی درەخت بكێشە بۆ دیاركردنی هەڵبژاردەی هەردوو جۆرە سەڵاتە وەك لە بەرامبەر دیارە.
2. لەهەر هەڵبژاردنێكی زەلاتە هێلكارییەكی درەخت بكێشە بۆ هەڵبژاردنی سێ جۆرە گۆشت.
3. ئەو ژەمانە چین كە لەتوانادایە رێكبخرێت؟ ژمارەیان چەندە؟
4. ئێستا چێشتخانەكە دەیەوێت پیازی برژاویان بیبەری برژاو بخاتە سەر گۆشتەكە.

ئاستی سێیەم بۆ هێلکارییەی درەختەكە زیادبكە بۆ ئەوەی بتوانێت ئەو ژەمانە بژمێرێت كە ئێستا پێكدەهێنرێت ژمارەكەی چەندە؟

خاڵی چاودێری ✓

هێلکارییەکی درەخت بۆ نمونەی پێشوو بكێشە بە دەستپێكردن بە خواردن وەك هەڵبژاردنی یەكەم.ئایا ئەم گۆڕانكارییە لە ڕێكخستنی هەردوو هەڵبژاردەكە دەبێتە هۆی گۆڕانی ئەنجامەكان؟ بەتێڕوانین لە هێلكاری درەخت وتێگەیشتن لە چونیەتی دروستكردنی یاسای بنەڕەتی ژماردن ڕووندەبێتەوە.

یاسای ژماردنی بنەڕەتی Fundamental Counting Principle

ئەگەر m ڕێگا لە توانادابوو بۆ هاتنەدی ڕووداوێك و n ڕێگا لە توانادابوو بۆ هاتنەدی ڕووداوێكی تر، ئەوا mn ڕێگا لە توانادایە بۆ هاتنەدی هەردوو ڕووداوەكە پێكەوە.

نموونە 1

سامی دەیەوێت وشەی نهێنی تایبەت بۆخۆی هەڵبژێرێت بۆ چوونە ناو ئینتەرنێت.ئەم وشەیە لە دوو پیتی نووسینی ئینگلیزی پێكدێت،چوار ڕەنووسی بەدوادادێت،ئایا دەتوانێت چەند وشەی نهێنی پێكبهێنێت بەمەرجێك ناتوانێت پیتی o و ڕەنووسی 0 بەكاربێنێت؟

شیكار

سامی دەتوانێت هەر پیتێك لە نێو 25 پیتدا بەكاربێنێت وهەر ڕەنووسێك لە نێو 9 ورەنووسدا.جا ئەگەر یاسای ژماردنی بنەڕەتیمان بەكارهێنا ئەمەی خوارەوەمان دەستدەكەوێت:

پیتی یەكەم		پیتی دووەم		ڕەنووسی یەكەم		ڕەنووسی دووەم		ڕەنووسی سێیەم		ڕەنووسی چوارەم
25	×	25	×	9	×	9	×	9	×	9

بەمەش ژمارەی وشە نهێنییەكان كە لەتوانادایە دەبێتە

$$25^2 \times 9^4 = 4\ 100\ 625$$

نموونە 2 تابلۆی ئۆتۆمبێل لە سێ پیت پێکدێت کە سێ ڕەنووسی بەدوادێت.ژمارەی تابلۆکان چەندە کە لە توانادایە؟ ئەگەر چییە کە پیتەکانی تابلۆی ئۆتۆمبیلەکەت هەرسێ پیتی سەرەتای ناوی خۆت بێت بەهەمان ڕێکخستن.

شیکار

دەست بەژماردنی دانەکانی بۆشایی نموونەکە بکە.

پیتی یەکەم		پیتی دووەم		پیتی سێیەم		ڕەنووسی یەکەم		ڕەنووسی دووەم		ڕەنووسی سێیەم
28	×	28	×	28	×	10	×	10	×	10

بەمەش ژمارەی تابلۆکانی کە لە تواناداندا دەبێتە $28^3 \times 10^3 = 21\,952\,000$ تابلۆ.

پاشان ژمارەی تابلۆکانی مەرجەکە دێنێتەدی هەژمێربکە.

پیتی یەکەم		پیتی دووەم		پیتی سێیەم		ڕەنووسی یەکەم		ڕەنووسی دووەم		ڕەنووسی سێیەم
1	×	1	×	1	×	10	×	10	×	10

بەمەش ژمارەی تابلۆکان کە مەرجەکە دێنێتەدی بریتییە لە $10^3 = 1000$ تابلۆ.

بەم جۆرە ئەگەری ئەوەی پیتەکانی تابلۆی ئوتۆمبێلەکەت هەرسێ پیتی سەرەتای ناوی خۆت بێت.بەهەمان ڕێکخستن بریتییە لە

$\frac{1000}{21\,952\,000} = 0.000045$ بەمانای 45 لە ملیۆن.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 شرۆڤە بکە چۆن هێڵکاری درەخت یارمەتیت دەدات لە تێگەیشتنی یاسای بنچینەیی ژماردن.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

2 فەرهاد دەیەوێت وشەی نهێنی تایبەت بە خۆی هەڵبژێرێت بۆ چوونە ناو ئەنتەرنێت.ئەم وشەیە لە دوو پیتی ئەبجەدی پیتەکانی ئینگلیزی پێکدێت، سێ ڕەنووسی بەدوادادێت. ئایا دەتوانێت چەند وشەی نهێنی پێکبێنێت بەمەرجێك ناتوانێت پیتی o و ڕەنووسی 0 بەکاربێنێت. هێڵکاری درەخت پێکبهێنە بۆ تۆمارکردن لەتوانادابوو لە چالاکییە دەرەکییەکاندا.

3 تۆمارکردن لەهەموو چالاکییە دەرەکییەکان

- وەرزشی تۆپی پێ، تۆپی باسکە، تۆپی سەرمێز.
- هونەرەکان: میوزیك، وێنە
- یانەکان: زانستەکان، بیرکاری

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

هێڵکارییەکی درەخت دروستبکە، کە هەموو تواناکانی خولیاکان لەناو ماڵ ولەدەرەوە دیاربکات.

4 خوولیاكان
- لەناو ماڵ: خوێندنەوە، سەیركردنی تەلەفزیۆن، گوێگرتن لە میوزیك.
- لەدەرەوەی ماڵ: ڕاكردن، سەیران، یانە.

ژمارەی وشە نهێنییەكان دیار بكە كە لە توانادایە پێكبهێندرێت بە بەكارهێنانی هەموو پیتە ئەبجەدیەكانی ئینگلیزی وهەموو ڕەنووسەكان لە هەر بارێكدا.

5 دوو ڕەنووس سێ پیتی بەدوادا بێت ورەنووسێكی بەدوادا بێت.

6 سێ ڕەنووس دوو پیتی بەدوادا بێت ورەنووسێكی بەدوادابێت.

7 سێ پیت سێ ڕەنووسی بەداوادابێت.

8 دوو پیت چوار ڕەنووسی بەدوادابێت.

9 بڵاكردنەوەی كتێب هەر كتێبێكی بڵاوكراوە ڕەنووسكراوێكی جیهانی هەڵدەگرێت كە بە ناو ISBN دەبرێت.ئەم ژمارەیە لە 10 ڕەنووس پێكدێت كە زانیاری دەربارەی كتێبەكە دەگرێتە خۆ وەك زمانی كتێب وناوی بڵاوكەر. چەند ڕەنووسكردن لە توانادایە؟

10 تاقیكردنەوە ئەزموونێكی هەڵبژاردنی وەڵامی ڕاست 15 پرسیاری تێدایە هەر پرسیارێك چوار وەڵامی هەیە، خوێندكاریەكێكیان هەڵدەبژێرێت.ژمارەی وەڵامەكانی هەموو پرسیارەكان كە لە توانادایە چەندە

11 ئاسایش پسپۆرێكی بواری ئاسایش كار لەسەر دانانی كلیلێك دەكات بۆ سیستمی ئاسایش، ئەم كلیلە سێ پیتی A, B, C بەكار دێنێت لەوانەیە هەر یەكێكیان پتر لە جارێك دووبارە بێتەوە.ئەم پسپۆرە دەیەوێت ئەگەری سەركەوتن لە هەوڵی كردنەوەی كلیلەكە كەمتر بێت لە 0.001 ئایا كەمترین ژمارەی پیتەكانی ئەم كلیلە چەندە؟



تێروانینێك بۆ دواوە

12 لەبیرت بێت كە كاغەزی یاری لە 52 كاغەز پێكدێت كە بەیەكسانی بەشدەبێتە سەرچەشنەكانی ♥ و ♦ و ♣ و ♠ .دڵدار كاغەزێكی لەوانە ڕاكێشا. ژمارەی ئەنجامەكان چەندە كە لە توانادایە وژمارەی ئەنجامەكان چەندە كە ڕووداوی (كاغەزی ڕاكێشراوەكە سووربێت).

13 ئارام دوو كاغەزی یاری یەك لە دوای یەك ڕاكێشا ئەگەر چییە كە هەردوو كاغەز ♣ بێت ئەگەر ئارام كاغەزەكە بگەڕێنێتەوە و تێكەڵیان بكاتەوە پێش ڕاكێشانی كاغەزی دووەم.

14 ئارام سەیریكرد كاغەزی یەكەم ♠ بوو كاغەزی دووەمی ڕاكێشا بە بێ ئەوەی یەكەمیان بگەڕێنێتەوە.ئەگەر چییە كە كاغەزی دووەم ♠ بێت.



تێروانینێك بۆ پێشەوە

15 دوو كەس هەڵبژێردران لە نێو 3 كچ و 4 كوڕ.ئەگەری ئەوە ئەم دوو كەسە كوڕ بن چەندە؟

گۆڕینەکان و ڕیزبەندییەکان* و گونجێنەکان

Permutations, Arrangements and Combinations





بۆچی

لەزۆر بارداا باس لە ڕێکخستنی ژمارەیەکی دیاریکراو لە دانەکانی کۆمەڵەیەک دەکات بە ڕیزبەندی یان بێ ڕیزبەندی

ئامانجەکان

- گۆڕینەکانی کۆمەڵەیەک دەنووسێت و ژمارەیان دیاردەکات.
- ژمارەی گۆڕینەکانی r شت لەنێو n شت هەژماردەکات.
- ژمارەی گونجێنەکانی r شت لەنێو n شت هەژماردەکات.

لەوانەی ڕابردوودا بینیمان چۆن یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاردێنین بۆ دۆزینەوەی ئەودانانەی کە بۆشایی نموونەکە پێکدێنن و ژمارەی ئەو دانانەی کە ڕووداوێك پێکدێنن. لەم وانەیەدا ڕێگاکانی تری ژماردن فێردەبین بە پێناسەیەکی ئاسان و گرنگ دەستپێدەکەین لەهەمان کاتدا.

لێکداوی n   n Factorial

ئەگەر n ژمارەیەکی تەواوی موجەب بێت ئەوا لێکداوی n بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی ژمارە تەواوەکان لە 1 تا n و بیرکاری زانەکان ئەم پێناسەیە فراوان دەکەن تا باری $n=0$ دەگرێتەوە بۆ ئەوەی بزانین $0!=1$ واتا کاتێك n ژمارەیەکی تەواوی سالب نەبێت.

$$n!=\begin{cases}1\times 2\times \ldots\times n & : n>0\\ 1 & : n=0\end{cases}$$

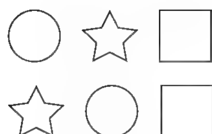
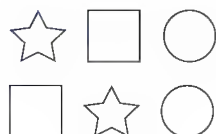
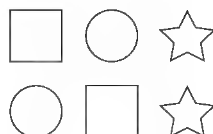
گۆڕینەکان   permutations

گۆڕین بریتییە لە ڕێکخستنی ژمارەیەك شت بە ڕیزبەندێکی دیاریکراو.

نموونە

1 وێنەی هەموو گۆڕینەکانی ئەم شتانە بکێشە: 

شیکار

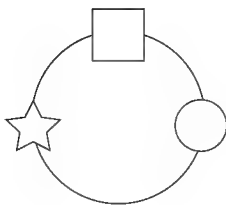




* ڕیزبەندییەکان = ترتیب

دەتوانین شتەکان لەسەر ڕاستەهێڵێك ڕێكبخەین وەك لە نموونەی پێشوو هەروەها دەتوانین لەسەر بازنەیەك ڕێكیانبخەین هەروەك لەشێوەی بەرامبەردا دیارە.

ڕێکخستنی شتەکان لە باری یەکەم گۆڕینی هێڵیە.

ڕێکخستنی شتەکان لە باری دووەم گۆڕینی بازنەییە.



نموونە 2
شیکارکردنی پرسیارەکان

دروستکردنی لیستێکی ڕێك: خشتەی خوارەوە هەموو گۆڕینەکانی لە تواناداپە پیشاندەدات بۆ ئەم پیتە لاتینیانە D، C، B، A. چۆن دەتوانیت یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی ژمارەی گۆڕینەکان؟

DABC	*CABD*	*BACD*	*ABCD*
DACB	*CADB*	*BADC*	*ABDC*
DBAC	*CBAD*	*BCAD*	*ACBD*
DBCA	*CBDA*	*BCDA*	*ACDB*
DCAB	*CDAB*	*BDAC*	*ADBC*
DCBA	*CDBA*	*BDCA*	*ADCB*

شیکار

دەتوانیت ژمارەی ئەم گۆڕینانە بە بەکارهێنانی یاسای ژماردنی بنەڕەتی دیاربکەیت هەروەك لە خوارەوە پیشاندراوە.

لەتواناداپە پیتی چوارەم هەڵبژێردرێت لە نێو	لەتواناداپە پیتی سێیەم هەڵبژێردرێت لە نێو	لەتواناداپە پیتی دووەم هەڵبژێردرێت لە نێو	لەتواناداپە پیتی یەکەم هەڵبژێردرێت لە نێو
1	2	3	4

کەواتە ژمارەی هەموو گۆڕینەکان بریتییە لە: $4\times3\times2\times1=4!=24$

ڕیزبەندییەکان Arrangements

نموونە 3

دەتوانیت چەند ژمارەی 3 ڕەنووسی پێکبهێنێت لە ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4، بەبێ دووبارەبوونەوە؟ ئەم ژمارانە بنووسە.

شیکار

هێلکاری درەخت بەکاربهێنە لە لاپەڕەی دواتر هەموو هەڵبژاردنەکانی تواناداپە پیشانبدات بۆ هەڵبژاردنی ڕەنووسی یەکان پاشان ڕەنووسی دەیان پاشان ڕەنووسی سەدان هەروەها ئەو ژمارەیە پیشاندەدات کە لە هەر بارێکدا دەینووسێت.

ڕەنووسی یەکان	ڕەنووسی دەیان	ڕەنووسی سەدان	ژمارەکە
1	2	3	321
		4	421
	3	2	231
		4	431
	4	2	241
		3	341
2	1	3	312
		4	412
	3	1	132
		4	432
	4	1	142
		3	342
3	1	2	213
		4	413
	2	1	123
		4	423
	4	1	143
		2	243
4	1	2	214
		3	314
	3	1	134
		2	234
	2	1	124
		3	324

ئەوەی لە نموونەی ڕابردوو کردت بەوتە وا دەردەبڕێت (3 ڕەنووست ڕێکخست لە نێوان 4 ڕەنووس) هەروەها بە دەستکەوتەکەت دەڵێیت ڕیزبەندییەکانی **Arangements** 3 شت لەنێو 4 شت بۆ دەستکەوتنی ژمارەی ئەو ڕیزبەندییانە یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاربهێنە:

لەتواناداپە ڕەنووسی یەکەم هەڵبژێردرێت لە نێو		لەتواناداپە ڕەنووسی دووەم هەڵبژێردرێت لە نێو		لەتواناداپە ڕەنووسی سێیەم هەڵبژێردرێت لە نێو
4	×	3	×	2

بەم جۆرە ژمارەیان دەبێتە $4 \times 3 \times 2 = 24$ ڕیزکردن.

هەوڵبدە دەتوانیت چەند ژمارەی 4 ڕەنووسی بە بەکارهێنانی ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4، 5 پێکبهێنیت بەبێ دووبارە بوونەوە؟

نموونــــه 4



باوكی هاوڕێ 10 CD میوزیكی كرده دیاری بۆ كوڕەكەی. هاوڕێ ویستی گوێبیستی سێ لەوانە بێت یەك لەدوای یەك

ئایا هاوڕێ چەند هەڵبژاردنی لە پێشە؟

شیكار

هاوڕێ دەتوانێت پەیكی یەكەم لەنێو 10 پەیك هەڵبژێرێت و دووەم لەنێو 9 پەیك، و سێیەم لەنێو 8 پەیك جا ئەگەر یاسای بنەڕەتی هەڵبژاردن بەكاربهێنێت دەبینێت كە هاوڕێ $10 \times 9 \times 8 = 720$ هەڵبژاردنی لە پێشە؟

هەوڵبدە

مەروان پێنج چیرۆكی كڕی بۆ ئەوەی سێ لەوانە لە پشووی هاویندا بخوێنێتەوە ئایا مەروان چەند هەڵبژاردنی لە پێشە؟

Arangements of n Objects r at Time n — **ڕیزبەندكردنی r شت لەنێو n**

ژمارەی ڕیزبەندییەكان r شت لەنێو n كاتێك $r \le n$ بریتییە لە

$$P^n_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

نموونــــه 5

سەلما دەیەوێت 4 كتێب بخاتە ناو كتێبخانەكەی كە لە 10 ڕەف پێكهاتووە بە مەرجێك پتر لە یەك كتێب لەسەر هەر ڕەفەیەك دانەنێت. **ئایا چەند هەڵبژاردنی لەپێشە؟**

شیكار

پرسیارەكە بریتییە لە ڕێكخستنی 4 ڕەف لەنێو 10 ڕەف، سەلما ڕەفی یەكەم لەناو 10 هەڵدەبژێرێت دووەم لەنێو 9 ، سێیەم لەنێو 8 ، چوارەم لەنێو 7 ، بەمەش ژمارە هەڵبژاردنەكان دەبێتە: $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

هەوڵبدە

دڵشاد 5 گۆی ڕەنگ جیاوازی لایە دەیەوێت بەسەر 8 سندووقی ڕەنووسكراو دابەشبكات، بەمەرجێ لەیەك گۆ پتر نەخاتە ناو هەر سندوقێك **ئایا چەند هەڵبژاردنی لە پێشە؟**

Circular Permutations — گۆڕینە بازنەییەكان

نموونــــه 6

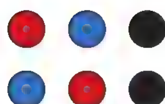
لە باخچەیەكدا 3 كورسی هەیە لەیلا دەیەوێت ئەم كورسییانە لە دەوری مێزێكی بازنەیی ڕێكبخات. **ئایا هەڵبژاردنەكانی بەردەم لەیلا چین و ژمارەیان چەندە؟**

شیكار

ئەگەر سەیری گۆڕینە هێڵییەكانی پێش لەیلا بكەیت ئەمەی خوارەوە دەبینێت:









سەرنجبدە هەرسێ گۆڕینە هێڵییەکانی لەریزی یەکەمدا (شین، سوور، ڕەش) یەك گۆڕینی بازنەیی پێکدێنن و گۆڕینە هێڵییەکان کە لە ریزی دووەمدا (شین، ڕەش، سوور) یەك گۆڕینی بازنەیی پێکدێنن کەواتە لەیلا دوو هەڵبژاردنی لەپێشە بۆ دانانی کورسییەکان لە دەوری مێزەکە.

هەوڵبدە ژمارەی هەڵبژاردنەکان چییە بۆ ڕیزکردنەکانی 4 جۆر زەلاتە لە قاپێکی بازنەییدا؟

گۆڕینە بازنەییەکان Circular Permutations

ژمارەی گۆڕینە بازنەییەکانی n شت بریتییە لە $(n-1)!$.

گۆنجێنەکان Combinaition

بینیمان کە گۆڕین بریتییە لە ڕێکخستنی r شت لە نێو n لە ڕیزکردنی دیارکراو ئەگەر ڕێکخستنەکە لە ڕیزبەندییەکە گرنگ نەبوو، شتێك بەدەست دێنێت کەپێی دەوترێت **گونجێن** **Combinations** گونجێنی r شت لەنێو n شت، کە $r \leq n$ زۆر بەسادەیی بریتییە لە کۆمەڵەیەك لە r شت لەنێو n شت. ئەگەر ئەم ژمارانە هەبوو: 1، 2، 3، 4، 5، ئەوا دانەکانی 2، 3، 5 گونجێنی 3 دانە لە بنچینەی 5 پێکدێنێت سەرنجبدە کە دانەکانی 2 ، 3، 5، هەمان گونجێن دەنوێنێت بە پێچەوانەی ئەوەی لە گۆڕین ڕوودەدات.

نموونە 7

جێبەجێکردن
وەرزش

ئەندامەکانی یانەیەکی وەرزشی دەستەیەکی 7 کارگێڕی پێکهاتوو لە سەرۆك و جێگیری سەرۆك و ڕازگر و بەرپرسی دارایی و بەرپرسی پەیوەندییەکان بە ڕاکێشانی نهێنی هەڵدەبژێرن لە نێو 7 پاڵێوراوا بۆ ئەوەی کارەکانی دەستەی کارگێڕی یانەکە ڕاپەڕێنن.
ژمارەی پێکهاتەکان چەندە کە لە تواناداپە؟

شیکار

بۆ هەژمێرکردنی ژمارەی پێکهاتەکان کە لە تواناداپە دەبینین کە:

دەتوانین سەرۆك هەڵبژێرین لە نێو	دەتوانین جێگری سەرۆك هەڵبژێرین لە نێو	دەتوانین ڕازگر هەڵبژێرین لە نێو	دەتوانین بەرپرسی دارایی هەڵبژێرین لە نێو	دەتوانین بەرپرسی پەیوەندییەکان هەڵبژێرین لە نێو
7 ×	6 ×	5 ×	4 ×	3

بەم جۆرە ژمارەی پێکهاتەکان کە لە تواناداپە بریتییە لە $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{7!}{(7-5)!} = 2520$

نموونه

8 یانەکە ڕێگای هەڵبژاردنی دەستەی کارگێڕی گۆڕی، و پێویستە لەسەر ئەندامان 5 پاڵێوراو لە 7 هەڵبژێرین بۆ پێکهێنانی دەستەکە، بێ دیاریکردنی کارەکانیان و بەشکردنی کارەکانیان بۆ لێژنە هەڵبژێردراوەکە بەجێهێشت.

شیکاری پرسیارەکان

أ ژمارەی ڕێگاکانی دابەشکردنی کارەکان لەنێو پێنج ئەندامەکە چەندە؟

ب ژمارەی دەستە کارگێڕییەکان چەندە کە دەتوانرێ لەلایەن ئەندامەکان هەڵبژێرین بەرێگای هەڵبژاردنی نوێ؟

شیکار

أ ژمارەی ئەو ڕێگایانەی کە پێنج ئەندامەکە لەنێو خۆیاندا دەتوانن کارەکانی پێدابەش بکەن بریتییە لە گۆڕینی کۆمەڵەیەکی 5 دانەیی $5!=1\times2\times3\times4\times5=120$

ب بۆ هەژمێرکردنی ژمارەی ئەو دەستە کارگێڕیانەی کە ئەندامەکان دەتوانن هەڵیانبژێرن بەرێگای نوێی، سەرنجی هەڵبژاردنەکەبدە کە هەر دەستەیەك کۆمەڵەیەکی 5 ئەندامییە لە نێو 7 لە لایەکی تریش هەر دەستەیەکی هەڵبژێردراو 120 ڕێکخستن لە دەستەی کارگێڕی پێکدێنن، دواى ئەوە ژمارەی ڕێکخستنە لەتوانابووەکان بریتییە لە ژمارەی ڕیزکردنەکانی 5 شت لە 7 ، واتە $\frac{7!}{(7-5)!}=2520$ جا ئەگەر یاسای ژماردنی بنەڕەتیت بەکارهێنا دەردەچێت.

ژمارەی ڕێکخستنەکان= ژمارەی دەستە هەڵبژێردراوەکان×ژمارە گۆڕینەکانی هەر دەستەیەك

2520 = ژمارەی دەستە هەڵبژێردراوەکان× 120

ژمارەی دەستەکان کە لە تواندایە هەڵبژێردرێن بریتییە لە: $21=\frac{2520}{120}$

چالاکی

بەراوردکردنی ڕیزبەندییەکان و گونجێنەکان

Comparing arrangements and Combinations

یانەیەك یارییەکی لەنێو ئەندامانی ڕێکخست کە بەم شێوەیە بوو:

- یاریزان 3 ڕەنووسی لەنێو دە ڕەنووسەکانی (0 تا 9)هەڵدەبژێرێت و لەسەر تەختە دەینووسێت.
- یاریزانەکە 3 گۆ لە تورەگەیەکی نارۆن ڕادەکێشێت یەك لە دوای یەك کە گۆی ڕەنووسکراوی لە (0 تا 9) تێدایە.
- بۆ ئەوەی یاریزانەکە بباتەوە دەبێ ئەو ڕەنووسانە ڕابکێشێت کە لەسەر تەختەکە نووسیویەتی و بەهەمان ڕێکخستن.

خاڵی چاودێری ✓

1. هیوا ڕەنووسەکانی 8 – 4 – 1 ی هەڵبژارد یەك لەدوای یەك ئەو ئەنجامانە چین کە بەرەو بردنەوەی دەبەن؟
2. ڕێکخەری یارییەکە ڕێساکانی گۆڕی مەرجی بردنەوەی یاریزانی کرد بەوەی سێ ڕەنووسەکە ڕابکێشێت بە هەر ڕێکخستنێك بێت هیوا یارییەکەی دووبارە کردەوە بەهەمان ڕەنووسەکان ئەو ئەنجامانە چین کە بەرەو بردنەوەی دەبەن؟
3. کام لە دوو یارییەکان دەرفەتی گەورەتری بردنەوەیان تێدایە: یەکەم یان دووەم؟ ڕاڤەبکە.

دەتوانیت گوێبیستی دوو شریتی میوزیکی بیت، یەك لەدوای یەك لەنێو 5 شریت بەرێگای جیاوازەکان کە ژمارەیان $4 \times 5 = 20$ ڕێگایە ئەگەر ویستت ژمارەی ڕێگاکانی کە دەتوانیت دوو شریتی موزیکی پێ بکرێت لە نێو 5 بدۆزیەوە ، ئەوا ڕێکخستن ڕۆڵ نابینێت دیارە ڕێکخستن لە کرینی شریتێکی حەسەن زیرەك و شریتێکی عەلی مەردان کاریگەری نابێت چونکە لیستی ژمێریارییەکە هەردوو شریتی پێکەوە تێدا دەبێت بۆ دیاریکردنی ژمارەی ڕێگاکانی کرینی دوو شریت لە نێو 5 ژمارەی ڕیزکردنەکانی دوو شریت لەنێو5 دابەش 2 بکە چونکە هەر شریتێك دوو جار دەژمێردرێت ئەمە ژمارەکەیە. $\frac{4 \times 5}{2} = 10$

Combination of n Ohjects r at time   **گونجێنەکانی *r* شت لە نێو *n***

ژمارەی گونجێنەکانی r شت لە نێو n ، کە $r \leq n$ ، بریتیە لە. $C^n{}_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$

سەرنجبدە کە ژمارەی گونجینەکانی r شت لە نێو n یەکسانە بە ئەنجامی دابەشکردنی ڕیزکردنەکانی r شت لە نێو n بەسەر ژمارەی گۆڕینەکانی r شت. $C^n{}_r = \frac{P^n{}_r}{r!}$

نموونە 9

جێبەجێکردنەکان

بازرگانی

دڵشاد دەیەوێت 3 پەرداخ هەڵبژێرێت لە نێو 5 پەرداخی گوشراوی میوەکانی: لیمۆ، سێو، ترێ مۆز، ئەنەناس. **ژمارەی ئەو هەڵبژاردنانەی کە لە توانایدایە چەندە؟**

شیکار

دڵشاد دەتوانێت پەرداخی یەکەم لە نێو 5 پەرداخ هەڵبژێرێت، دووەم لەناو 4 پەرداخ، و سێیەم لەناو 3 پەرداخ. بەڵام هەڵبژاردنی گوشراوی لیمۆ و گوشراوی مۆز و گوشراوی ترێ جیاوازی نییە لەگەڵ هەڵبژاردنی گوشراوی مۆز و گوشراوی ترێ و گوشراوی لیمۆ. واتە ئەو ڕیزکردنەی دڵشاد پەیڕەوی دەکات لە هەڵبژاردنی پەرداخەکان، هیچ ڕۆڵێکی لەم پرسیارەدا نییە. لێرەوە هەڵبژاردنەکان کە لە پێش دڵشادە بریتییە لە دابەشکردنی ژمارەی ڕیزکردنەکانی 3 لە 5 بەسەر ژمارەی گۆڕینەکانی 3 شت واتە. $\frac{5!}{(5-3)!} \div 3! = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$

هەوڵبدە

ژمارەی هەڵبژاردەکان چەندە ئەگەر دڵشاد بیەوێت 4 پەرداخ هەڵبژێرێت؟

کامیان گەورەترە ڕیزکردنەکانی 3 لە پێنج، یان گونجێنەکانی 3 لە 5 ؟

بیری ڕەخنەگر

لە دوو نموونەی پێشوودا بۆ مان دەردەکەوێت کە پەیوەندییەك هەیە لە نێوان ژمارەی ڕێکخستنەکانی ***r*** شت لە ***n*** ، و ژمارەی گونجێنەکانی ***r*** شت لە ***n*** .

پەیوەندی لە نێوان گۆڕینەکان و گونجێنەکان

ژمارەی ڕیزبەندییەکانی r شت لە ***n*** = ژمارەی گونجێنەکانی r شت لە ***n*** × ژمارەی گۆڕینەکانی r شت.

لەکاتی شیکارکردنی پرسیارێکدا، زۆر جار پێویست دەکات شێوازی گونجاو بۆ ڕیزبەندییەکان هەڵبژێرێت: یان گونجێنەکان.

نموونــــــه 10 نموونەی گونجاو هەڵبژێرە، ئینجا ژمارەکە هەژمێرکە.

أ بەچەند ڕێگا سەرۆك و جێگیری سەرۆك و ڕازگر هەڵدەبژێردرێت لە نێو 5 پاڵێوراو؟

ب بەچەند ڕێگا لێژنەیەکی پێکهاتوو لە 3 ئەندام هەڵدەبژێردرێت لەنێو 5 پاڵێوراو؟

شیکار

أ نموونە لێرەدا نموونەی ڕیزکردنەکانە، چونکە کەسێك پێویستە بۆ سەرۆکایەتی، و یەکێکی تر بۆ جێگری سەرۆکایەتی، و سێیەم بۆ ڕازگری. ژمارەی پێکهینەرەکان بریتیە لە:

$\frac{5!}{(5-3)!}=5\times4\times3=60$

ب شێواز لێرەدا شێوازی گونجێنەکانە، چونکە داواکراو هەڵبژاردنی کۆمەڵەیەکی 3 کەسییە.

ژمارەی ڕێکخستنەکان بریتییە لە: $C^5{}_3=\frac{5!}{3!\times(5-3)!}=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$

هەوڵبدە چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی لێژنەیەکی 2 کەسی لەنێو 7 کەس؟ چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی سەرۆك و جێگری لەنێو ئەندامانی لێژنەیەکی 7 کەسی؟

بەکارهێنانی گونجێنەکان لە هەژمێرکردنی ئەگەر

نموونــــــه 11 لەیلا دوو گۆی لە تووڕەگەیەك ڕاکێشا کە پێنج گۆی سوور و سێ گۆی شینی تێدایە. ئەگەر چییە کە هەردوو گۆیەکە سوور بن؟

شیکار

ئەم ئەگەرە یەکسانە بە ڕێژەی ئەگەری ژمارەی ئەو ئەنجامەی کە گۆیەکان تێدا سوور دەبێت لەسەر ژمارەی هەموو ئەنجامەکان کە لە تواناندان. ژمارەی یەکەم بریتییە لە گونجێنەکانی 2 لە 5. و ژمارەی دووەم بریتییە لە گونجێنەکانی 2 لە 8 (8 ژمارەی گشت گۆیەکانە).

ژمارەی یەکەم $C^5{}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$ ژمارەی دووەم $C^8{}_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

کەواتە، ئەگەری ئەوەی هەردوو گۆ سوور بن بریتییە لە: $\frac{10}{28}\approx0.3\,571=35.71\%$

هەوڵبدە ئەگەر چییە دوو گۆیەکە لە دوو ڕەنگی جیاوازبن.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ڕاڤەبکە چۆن یاسای ژماردنی بنەڕەتی یارمەتیدەر دەبێت لەدیاریکردنی ژمارەی گۆڕینەکانی چوار شت.

2 ڕاڤەبکە چۆن یاسای بنچینەیی ژماردن یارمەتیدەر دەبێت لەدیاریکردنی ژمارەی ڕیزبەندییەکانی چوارشت لە نێو پێنج.

3 جیاوازی نێوان ڕیزبەندییەکان و گونجێنەکان ڕاڤە بکە. نموونەیەك بێنەوە وەك پاڵپشت بۆ ڕاڤەکەت.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 دەتوانیت چەند ژمارە بنوسیت بە بەکارهێنانی شەش ڕەنووسی، جیا لە 0، بێ دووبارە کردنەوە

5 ژمارەی هەڵبژاردنەکانی سەیرکردنی 3 شریتی ڤیدیۆ یەك لەدوای یەك چەندە لە نێو 7 شریت؟

6 ژمارەی هەڵبژاردنەکان لە پێش 12 کەس چەندە بۆ دانیشتن لەسەر مێزێکی بازنەیی بۆ خوان؟

7 ژمارەی ڕێگاکان چەندە بۆ هەڵبژاردنی سەرۆك وجێگری سەرۆك وراژگر لەنێو لێژنەیەکی 6 کەسی؟

8 ژمارەی ڕێگاکانی کڕینی 3 کتێب و 4 شریتی میوزیك چەندە لەکتێبخانەیەك 9 کتێب و 7 شریتی میوزیکی تێدایە؟

9 لە ڕاپرسییەك دەربارەی ڕێکخستنی هاتوچۆ لە شەقامێکی شاردا، 10 کەس هەڵیانبژارد کە شەقامەکە لەهەردوولا کراوەبێت، و 8 کەس هەڵییانبژارد کە شەقامەکە لەیەك لا کراوەبێت. دوای ڕاپرسییەکە دووکەس هەڵبژێردران لەوانە لە ڕاپرسییەکەدا دەنگیان داوە. ئەگەر چییە کە هەردووکیان لەگەڵ کردنەوەی شەقامەکە بن لەدوولا؟

هەژماربکە.

10 $7!-5!$ 11 $6!-4!$ 12 $(7-5)!$ 13 $(6-4)!$

14 $\frac{8!}{5!\times 3!}$ 15 P_4^{10} 16 P_5^{10} 17 P_2^7

18 C_4^7 19 C_4^8 20 C_7^{10} 21 C_5^9

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

سارا 8 پلیتی ڕەنووسکراوی هەیە لە 1 تا 8 . لە هەر پرسیارێکدا دەتوانیت چەند ژمارە بنووسێت بە بەکارهێنانی پلیتەکانی کە لایەتی؟

22 لە 5 ڕەنووس   23 لە 3 ڕەنووس   24 لە 4 ڕەنووس

25 لە 6 ڕەنووس   26 لە یەك ڕەنووس   27 لە 8 ڕەنووس

ژمارەی ئەو لیژنانە چەندن کە لەتوانا دایە هەڵبژێردرێن؟

28 3 ئەندام لە نێو 5 پاڵێوراو

29 7 ئەندام لە نێو 8 پاڵێوراو

30 8 ئەندام لە نێو 12 پاڵێوراو

31 6 ئەندام لە نێو 10 پاڵێوراو

کارگێڕی دامەزراوەکان یەکێك لە کۆمپانیاکان پێشوازی لە 8 فەرمانبەری نوێ کرد. ژمارەی هەڵبژاردنەکان بۆ دابەشکردنیان بەسەر پۆستە بەتاڵەکاندا لەهەر بارێکدا دیاریکە.

32 8 پۆست

33 9 پۆست

34 10 پۆست

35 15 پۆست

توورەگەیەکی ناڕوون 5 گۆی سپی و3 گۆی سەوزی تێدایە. ئەگەر چییە ئەمانە پێکەوە ڕابکێشیت:

36 دوو گۆی ڕەنگ جیاواز

37 3 گۆ دووانیان سپی و سێیەمیان سەوز.

38 4 گۆ، دووانیان سپی و دووانیان سەوز.

39 6 گۆ، سێیان سەوز.

40 چاویلکە فرۆشێك دەیەوێت 7 چاویلکەی جیا لەسەر بنکەیەکی بازنەیی نمایش بکات، ئایا چەند هەڵبژاردنی لەپێشە بۆ ڕیزبەندکردنیان؟

41 یەکێك لە کۆمپانیاکان دەیەوێت فەرمانبەرانی ڕیزبەند بکات، هەر یەکێکیان بە ژمارەیەکی ڕیزبەندی کە لە 4 ڕەنووسی پێکهاتبێت. ژمارەی ڕیزبەندییەکان چەندە کە لەتوانادابێت ئەگەر بتوانین ڕەنووسەکان لە 0 تا 9 بەکاربێنین و دووبارەبوونە وە ئاسایی بێت؟ ژمارەیان چەندە ئەگەر دووبارە بوونەوە قەدەغە بێت؟

42 مستەفا چەرخێکی میلداری دروستکرد کە ڕەنووسەکانی لە 1 تا 3 ی لەسەربێت. مستەفا چەرخەکەی کردە سێ بەشی یەکسان. بە چەند ڕێگا دەتوانێت سێ ڕەنووسەکان لەسەر بەشەکان بنووسێت؟

نموونەکە دیاریکە لەهەر بارێك لەبارەکانی پرسیار 43-46 .

43 هەڵبژاردنی 4 کتێب بۆ بڵاوکردنەوە لە نێو 302 کتێب.

44 هەڵبژاردنی 9 یاریزان لە نێو 15 یاریزان، بۆ دامەزراندنی تیپی تۆپی باسکە.

45 هەڵبژاردنی چوار پاڵێوراو لە نێو 200 بۆ بردنەوەی دیاری 100 هەزار دینار و 200 هەزار دینار و 500 هەزار دینار و ملیۆنێك دینار.

46 هەڵبژاردنی سەرۆك و جێگری سەرۆك بۆ سەندیکایەکی 100 ئەندامی.



تیرۆانینێك بۆ دواوە

47 سندوقێك 20 كتێبی تێدایە، 14 یان لەبابەتی ئابووری و 6 یان لە بابەتی جوگرافیا. دوو كتێب بەشێوەیەكی هەڕەمەكی لە سندوقەكە ڕاكێشرا.

ژمارەی دانەكانی بۆشایی نموونەكە چەند؟

ئەگەر چییە هەردوو كتێب لەبابەتی ئابووری بن؟

ئەگەر چییە یەكێكیان لەبابەتی ئابووری و ئەویتریان لە بابەتی جوگرافیا بێت؟

ئەگەر چییە هەردووكیان لەهەمان بابەت بن (ئەگەری تەواوكەر لەبیر بێت)؟



تیرۆانینێك بۆ پێشەوە

48 كاروان لە سەرەتای ساڵی خوێندنەوە 10 تاقیكردنەوەی بیركاری كردووە و نمرەكانی یەك لەدوای یەك ئەمانەن: 35 ، 52 ، 66 ، 52 ، 48 ، 70 ، 52 ، 48 ، 58 ، 60. ناوەند و ناوەڕاست و باو بۆ ئەم نمرانە بدۆزەرەوە.

بەشی 4

پێوەرەکانی ئامار

Statistical measurements

وەزارەتەکانی پلاندانان لە وڵاتانی جیهان هەڵدەستن بە سەرژمێری خولی بۆ دانیشتوان.لەم کردارەدا فۆڕمی تایبەت پڕدەکرێتەوە کە زانیاری دەربارەی هەموو لایەنەکانی ژیانی ڕۆژانەی دانیشتووان دەگرێتە خۆ. پێدراوە کۆکراوەکان دەکەونە ژێر زینجیرەیەك چارەسەرکە تێیدا ژمارەیەك لە پێوەرەکانی ئامار بەکاردێت بۆ دەستکەوتنی چەند ئاماژەیەك بە ئامانجی پلاندانان وخۆ ئامادەکردن بۆ هێنانە دی پێداویستییەکانی گەشەکردنی کۆمەڵایەتی وئابووری. دەتوانین پێوەرەکانی ئامار بە شێوەیەکی گشتی بۆ دوو جۆر بەش بکەین: پێوەرەکانی ڕووکردنەوە چەق (بریتییە لە نزیکبوونەوەی پێدراوەکان لە بەهایەکی ڕووەو چەقە ناوەند). وپێوەرەکانی پەرتبوون (بریتییە لە دوورکەوتنەوەی پێدراوەکان لە بەهایەکی ڕووەو چەق کە ناوەندە).

الجمهورية العراقية
وزارة التخطيط
الجهاز المركزي للاحصاء
مديرية الاحصاء السكاني

CENTRAL STATISTICAL ORGANIZATION

استمارة ت / س / ٢

إستمارة التعداد العام للسكان

المستطيلات المظللة خاصة بالجهاز المركزي للاحصاء فقط ولا يجوز الكتابة فيها

تملأ الحقول من ١ الى ١١ من قبل العداد

١ - اسم المحافظة :	٢ - اسم القضاء :	٣ - اسم الناحية :	

٤ - البيئة	٥ - اسم الحي او المحلة او المقاطعة	٦ - اسم القرية	٧ - رقم المجال	٨ - رقم الشارع او الزقاق	٩ - رقم المبنى للتعداد	١٠ - تسلسل الاسرة في المحل	١١ - عدد الاسر في الوحدة السكنية
١ ☐ حضر ٢ ☐ ريف	رقم الحي او المحلة او المقاطعة	رقم القرية					

ضع علامة (×) في المربع المناسب

١٢ - عدد غرف النوم للاسرة	١٣ - ملكية الوحدة السكنية: قطاع خاص	١٣ - ملكية الوحدة السكنية: قطاع اشتراكي	١٤ - حجم الوحدة السكنية المتأجرة	١٥ - بدل الايجار الشهري (دينار)
	١ ☐ ملك ٢ ☐ ايجار ٣ ☐ اخرى	٤ ☐ ايجار ٥ ☐ اخرى	١ ☐ الوحدة السكنية كلها ٣ ☐ غرفتان ٢ ☐ غرفة واحدة ٤ ☐ ثلاث غرف فأكثر	

تملأ الحقول من (١٦-٢٦) لكل اسرة تسكن وحدة سكنية مستقلة ، وتملأ للاسرة الاولى فقط اذا كانت الوحدة السكنية مشغولة بأكثر من اسرة

١٦ - نوع الوحدة السكنية	١٧ - نوع المادة المستخدمة في تشييد جدران الوحدة السكنية	١٨ العدد الكلي للغرف في الوحدة السكنية	هل في الوحدة السكنية: ١٩ - حمام مستقل	٢٠ - مرافق مستقلة	٢١ - حمام ومرافق مشتركة	٢٢ - مطبخ
١ ☐ دار ٥ ☐ خيمة او بيت شعر ٢ ☐ شقة ٣ ☐ دار طين ٦ ☐ كرفان ٤ ☐ صريفة او كوخ ٧ ☐ اخرى	١ ☐ طابوق ٤ ☐ كتل من الحجر الجاهز ٢ ☐ حجر ٥ ☐ طين او لبن ٣ ☐ كتل (بلوك) ٦ ☐ اخرى		١ ☐ نعم ٢ ☐ لا	١ ☐ نعم ٢ ☐ لا	١ ☐ نعم ٢ ☐ لا	١ ☐ نعم ٢ ☐ لا

٢٣ - هل الوحدة السكنية مجهزة بالكهرباء	٢٤ - هل الوحدة السكنية مجهزة بالهاتف	٢٥ - مصدر مياه الشرب للوحدة السكنية	٢٦ - تصريف المياه للوحدة السكنية
١ ☐ نعم ٢ ☐ لا	١ ☐ نعم ٢ ☐ لا	١ ☐ اسالة ماء ٢ ☐ حنفية عامة ٣ ☐ بئر ارتوازية ٤ ☐ نهر او ساقية ٥ ☐ اخرى	١ ☐ مجاري عامة ٣ ☐ اخرى ٢ ☐ خزان داخلي (سبتك تنك)

٢٧- يملأ لنزلاء وشاغلي الفنادق والاقسام الداخلية والمؤسسات الصحية ووحدات الاصلاح ودور العبادة وما شابه

١ ☐ فندق او دار استراحة او مجمع سياحي ٢ ☐ قسم داخلي ٣ ☐ دور الرعاية الاجتماعية ٤ ☐ مؤسسات صحية
٥ ☐ دور العبادة ٦ ☐ وحدات الاصلاح ومراكز الشرطة ٧ ☐ وحدات سكنية يشغلها أفراد
اسم المؤسسة .... ٨ ☐ أخرى

وانەکان

1. پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق.
2. پێوەرەکانی پەرتبوون.



پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق

Measures of central tendency



ئامانجەکان

- پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق دەناسێت.
- ناوەند وناوەندی قورسکراو بۆ پێدراوەکان وپێدراوە خرکراوەکان هەژماردەکات.
- ناوەڕاستە بۆ کۆمەڵێك پێدراو هەژماردەکات.
- باو بۆ پێدراوەکان وپێدراوە خرکراوەکان هەژماردەکات.

ئامارزانەکان چەندین پێوەری ڕووکردنە چەق بەکاردێنن لەم وانەیەدا ناوەند وناوەڕاستە وباو بۆ کۆمەڵێك لە پێدراوەکان فێردەبێت وفێری چۆنییەتی دۆزینەوەیان دەبێت.

ناوەند Mean

لەوانەیە ناوەند وەهەندێك جار پێیدەوترێت ناوەندی ژمێرەیی بەربڵاوترین پێور بێت لە پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق وزیاترین بەکارهێنانی هەبێت، کە ڕۆژانە بەکاریدێنین بۆ نموونە مامۆستا ناوەندی ئەو نمرانە هەژمێر دەکات کە خوێندکاران لەهەر تاقیکردنەوەیەکدا دەستیاندەکەوێت، ئەم بەهایە بە پێوەرێك دادەنێت بۆ سەرکەوتنی لە گەیاندنی زانیاری وکارامەییەکان.

نموونە

1 **دڵشاد 5 کراسی لە دوکانی جیا وبەنرخی جیاکڕی.کراسی یەکەمی بە 7.5 هەزار دینار ودووەمی بە 8 هەزار دینار وسێیەمی بە 7 هەزار دینار وچوارەمی بە 9 هەزار دینار وپێنجەمی بە 8.5 هەزار دینار کڕی ئایا ناوەندی نرخی کراسەکان چەندە؟**

شیکار

بۆ هەژمارکردنی ناوەندی نرخی کراسێك نرخی کراسەکان کۆدەکەنەوە وسەرەجەمەکە دابەشی ژمارەی کراسەکان دەکەن ناوەندی نرخی کراسێك بریتییە لە 8 هەزار دینار.

$$\frac{7.5+8+7+9+8.5}{5}=\frac{40}{8}=8$$

ناوەند Mean

ناوەندی کۆمەڵە بەهایەك وەك $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ کە ئەگەر لە جیاتی هەموو بەهاکان لە کۆمەڵەکە دابنرێن سەرجەمی بەهاکانی کۆمەڵەکە ناگۆڕێت.ناوەندی کۆمەڵێك بەها بە ڕێگای کۆکردنەوەی هەموو بەهاکان و دابەشکردنی سەرجەمەکە بەسەر ژمارەی بەهاکان دەدۆزرێتەوە.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

نموونـــە 2

نمرەکانی شیرین لە هەندێك بابەتی خوێندن بەم جۆرە بوو

زمانی کوردی	زمانی عەرەبی	زمانی ئینگلیزی	بیرکاری	مێژوو	زانستەکان
80	72	76	81	65	64

ئایا ناوەندی نمرەکانی لەم بابەتانە چەندە؟

شیکار

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{80+72+76+81+65+64}{6} = \frac{438}{6} = 73$$

هەوڵبدە ناوەندی پلەکانی گەرمی لە هەفتەی ڕابردوو چەند بووە؟ ئەگەر پلەکانی گەرمی ڕۆژەکان بەم شێوەیە بوون -1,1,0,-2,4,5,7

نموونـــە 3

ژمارەی ڕۆژانی پشووی کارگەکان لە ساڵی ڕابردوودا بەم شێوەیە بوو:

مانگ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ڕۆژەکان	6	4	3	4	2	5	3	4	5	2	3	4

ئایا ناوەندی ژمارەی ڕۆژەکانی پشوو لە هەر مانگێك چەند بووە؟



شیکار

$$\frac{6 + 4 + 3 + 4 + 2 + 5 + 3 + 4 + 5 + 2 + 3 + 4}{12} = \frac{45}{12} = 3.75$$

ناوەندی ژمارەی ڕۆژەکانی پشوو لەهەر مانگێکدا بریتی بووە لە 3.75 ڕۆژ.

هەوڵبدە سەردار بە ئۆتۆمبێلەکەی لە شارێك چوو بۆ شارێکی تر ولەهەر کاتژمێرێکی خایەنراوی گەشتەکەی خێراییەکەی بە نەگۆڕی هێشتەوە، خێراییەکانی بەم جۆرە بوون:

کاتژمێر	یەکەم	دووەم	سێیەم	چوارەم	پێنجەم
خێرایی	80	100	106	93	121

پاش هەفتەیەك سەردار گەڕایەوە بۆ شاری یەکەم وهەموو دوورییەکەی بە خێراییەکی نەگۆڕ بڕی گەشتی گەڕانەوەش ئەوەندەی گەشتی چوون کاتی خایاند. ئایا خێراییەکەی لە گەڕانەوەدا چەند بووە.

ناوەندی قورسکراو

ئەگەر $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ چەند پێدراوێکی دووبارە بوون و ئەگەر m_1 دووبارەی x_1 و m_2 دووبارەی x_2 و m_3, ... و m_n دووبارەی x_n بێت ئەوا ناوەندی قورسکراوبۆ پێدراوەکانی $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

$$\overline{X}_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

Weighted mean ناوەندی قورسکراو

ڕوونکردنەوە

ئەگەر تەمەنی خوێندکارانی پۆلی دەیەم بریتیە بێت لە:

16, 15, 15, 14, 17, 15, 17, 14, 16, 14, 15, 17, 16, 15, 16, 14, 17, 15, 16, 15

ئەوا دەتوانین ناوەندی خوێندکاران لەم پۆلەدا، وەك پێشتر فێربووین، بدۆزینەوە:

$$\overline{x} = \frac{15+16+15+17+14+16+15+16+17+15+14+16+14+17+15+17+14+15+15+16}{20}$$

$$= \frac{309}{20} = 15.45$$

ناوەندی تەمەنی خوێندکار لەم پۆلەدا بریتییە لە 15.45 ساڵ.

ئەگەر بەوردی لە پێدراوەکان وردبنەوە، دەبینیت هەریەکێکیان لە جارێك پتر دووبارە دەبێتەوە. ئەوەتا تەمەنی 14 ساڵی 4 جار دووبارە دەبێتەوە، خشتەی خوارەوە ئەو بەهایانە پیشاندەدات کە لە کۆمەڵەی پێدراوەکاندا هاتووە و هەریەکیان چەندجار دووبارە بووتەوە:

تەمەن	14	15	16	17
دووبارە	4	7	5	4

ئەم خشتەیە پێیدەوترێت خشتەی دووبارە بوونەوەی **کۆمەڵەی پێدراوەکان Frequency Table**

ئەم خشتەیە پێیدەوترێت خشتەی دووبارەبوونەوەی کۆمەڵەی پێدراوەکان ئەگەر $14+14+14+14$ مان بە 4×14 گۆڕی لە هەژمێرکردنی ناوەندەکە ئەوا ئامانجەکە ناگۆڕێت بەم جۆرە دەتوانیت بنووسیت $\overline{x} = \frac{(4\times14)+(7\times15)+(5\times16)+(4\times17)}{4+7+5+4} = \frac{309}{20} = 15.45$ دەڵێین ناوەندی قورسکراوی 14، 15، 16، 17 مان هەژمێرکرد کە یەك لەدوای یەك بە 4، 7، 5، 4. قورسکراون.

نموونە 4

لێژنەی هەڵسەنگاندن لە ڤیستیڤاڵێکی سینەمایی فیلیمی هەڵسەنگاند و ژمارەیەك ئەستێرەی بە هەر فیلمێك بەخشی خشتەی خوارەوە ئەنجامەکانی هەڵسەنگاندن نیشاندەدات.

هەڵسەنگاندنی فیلمەکان					
هەڵسەنگاندن	****	***	**	*	بێ ئەستێرە
ژمارەی فیلم	8	12	7	2	1



ئایا ناوەندی هەڵسەنگاندنی هەر فیلمێك چەندە؟

شیکار

هەر فیلیمێك 2.8 ئەستێرەی وەرگرت وەك ناوەند، ناوەندی هەڵسەنگاندنیهەر فیلیمێك 2.8 ئەستێرە بوو.

$$\overline{x} = \frac{(8\times4)+(12\times3)+(7\times2)+(2\times1)+(1\times0)}{8+12+7+2+1} = \frac{84}{30} = 2.8$$

هەوڵبدە

درێژی خوێندکارانی پۆلی دەیەم بریتییە لە:
178، 160، 153، 160، 187، 182، 153، 160، 156، 160 ناوەندی درێژی خوێندکارانی پۆلی دەیەم چەندە؟

بەرەنگاری

نمرەکانی نەسرین لە هەریەك لە وەرزەکانی یەکەم و دووەمی خوێندن بەم شێوەیە بوو:
وەرزی یەکەم: 65، 80، 70، 50، 50، 70، 50، 70، 80، 70، 80.
وەرزی دووەم: 67، 86، 72، 60، 60، 86، 72، 80، 60، 74، 86.
خشتەیەکی دووبارەبوونەوە بۆنمرەکانی نەسرین لە وەرزی یەکەم دروستبکە و بەکاربهێنە بۆ هەژمێرکردنی ناوەندی نمرەکانی لەو وەرزەدا پاشان خشتەیەکی دووبارەبوونەوە بۆ نمرەکانی نەسرین لە وەرزی دووەم دروستبکە و بەکاری بێنە بۆ ئەژمێرکردنی ناوەندی نمرەکانی لەو وەرزەدا. چۆن ناوەندی نمرەکانی نەسرین دەدۆزیتەوە لە ساڵەکە بەگشتی؟ ئەم ناوەندە بدۆزەرەوە؟

ناوەندی قورسکراو بۆ پێدراوە کۆکراوەکان Weighted mean for grouped data

143 مامۆستا بەشداربوون لە خولێکی پەروەردەیی لە دهۆك، وەزارەتی پەروەردە داوای لە بەڕێوەبەری خولەکە کرد توێژینەوەیەکی ئامارگەری ئامادەبکات دەربارەی تەمەنی بەشداربووانی خولەکە. بۆ نووسینی ڕاپۆرتەکە لەلایەن بەڕێوەبەر ئەم هەنگاوانەی ئەنجامدا.

1. نووسینی ناوی مامۆستاکان و تەمەنەکانیان و هاوپێچکردنی لەگەڵ تەمەنی بچووکترین مامۆستا و گەورەترین مامۆستا و ناوەندی تەمەنەکانیان هاوپێچی ڕاپۆرتەکەی بکات بەڵام خوێندنەوەی ئەم ڕاپۆرتە ئاسان نییە و بیرۆکەیەك دەربارەی دابەشبوونی مامۆستاکان بەپێی تەمەنەکانیان پێشکەش ناکات.

2. دروستکردنی خشتەیەکی دووبارەبوونەوەی تەمەنەکانی مامۆستاکان هاوپێچکردنی لەگەڵ تەمەنی بچووکترین مامۆستا و گەورەترین مامۆستا و ناوەندی تەمەنەکانیان بەڵام ستوونەکانی خشتەکە زۆر دەبن(39 ستوون بەناوی 20، 21، ....، 57، 58).

3. ڕێکخستنی تەمەنەکان لەچەند چەشنێك مەودای هەریەکێکیان 5 ساڵ بێت و دروستکردنی خشتەیەك بەم چەشنانە و ژمارەی مامۆستایان لەهەر چەشنێك.

بەڕێوەبەرەکە ڕێگای سێیەمی هەڵبژارد و ئەم خشتەیەی هەناردە وەزارەت:

چەشن	[20, 25[	[25, 30[	[30, 35[	[35, 40[	[40, 45[	[45, 50[	[50, 55[	[55, 60[
ژمارە	12	23	25	36	24	12	9	2

ئەم زانیاریانەش هاوپێچ بوون:

بچووکترین تەمەن: 20 ساڵ **گەورەترین تەمەن:** 58 ساڵ **ناوەندی تەمەن:** 36.66 ساڵ

ئایا بەڕێوبەرەکە چۆن ناوەندی تەمەنەکانی دۆزییەوە؟

دۆزینەوەی ناوەندەکە پێدراوەکان لەچەند چەشنێکدا ڕێکخرابن بەم شێوەیە دەبێت:

1. دیارکردنی چەقی هەر چەشنێك کە بریتییە لە ناوەندی لایەکانی.

2. لێکدانی چەقی هەرچەشنێك لە ژمارەی دانەکان لە چەشنەکە.

3. کۆکردنەوەی ئەنجامەکانی هەموو لێکدانەکان لەلایەك وژمارەی دانەکانی هەموو چەشنەکان لەلایەکی تر.

4. دابەشکردنی سەرجەمی یەکەم بەسەر سەرجەمی دووەم.

خشتەی خوارەوە پوختەی ئەم هەنگاوانە دەخاتە ڕوو:

چەشنەکان	دووبارەبوونەوە (ژمارەی دانەکان)	چەقی چەشن	دووبارەبوونەوە (ژمارەی دانەکان)
[20, 25[	12	22.5	270
[25, 30[	23	27.5	632.5
[30, 35[	25	32.5	812.5
[35, 40[	36	37.5	1350
[40, 45[	24	42.5	1020
[45, 50[	12	47.5	570
[50, 55[	9	52.5	472.5
[55, 60[	2	57.5	115
سەرجەم	143		5242.5

ئاگاداربە !

چەشنی[20, 25[ئەو تەمەنانە دەگرێتەوە کە بچووکتر نییە لە 20 و بچووکترە لە 25

تێبینی دەتوانین(0,10] بەکاربهێنین لە جیاتی[0,10[وە هەر وەها.....

بەرەنگاری مانای 0.66 ساڵ چی دەگەیێنێت؟

نموونە 5 مامۆستایەکی بیرکاری لە زانکۆی سەلاحەدین ئەنجامی تاقیکردنەوەیەکی خوێندکارەکانی لەم خشتەیەدا پوختەکرد:

چەشنەکان	[0, 10[	[10, 20[	[20, 30[	[30, 40[	[40, 50[	[50, 60[	[60, 70[	[70, 80[	[80, 90[	[90, 100]
دووبارە	2	3	4	5	7	11	11	12	4	1

ئایا ناوەندی نمرەکان چەندە؟

شیكار

چەشنەكان	دووبارەبوونەوە (ژمارەی وانەكان)	چەقی چەشن	دووبارە×چەقی چەشن
$[0, 10[$	2	5	10
$[10, 20[$	3	15	45
$[20, 30[$	4	25	100
$[30, 40[$	5	35	175
$[40, 50[$	7	45	315
$[50, 60[$	11	55	605
$[60, 70[$	11	65	715
$[70, 80[$	12	75	900
$[80, 90[$	4	85	34
$[90,100]$	1	95	95
سەرجەم	60		3300

ناوەندی نمرەكانی خوێندكارەكان: $\overline{x} = \frac{3300}{60} = 55$

هەوڵبدە ناوەندی پێدراوەكانی ئەم خشتەیە بدۆزەرەوە:

چەشنەكان	$[0, 10[$	$[10, 20[$	$[20, 30[$	$[30, 40[$	$[40, 50[$	$[50, 60[$	$[60, 70[$
دووبارە	2	3	4	5	7	11	11

ناوەڕاستە Median

نموونە 6

لە نمایشی تیپە وەرزشییەكان ڕاهێنەری تیپی بەرزكردنەوەی قورسایی ویستی كۆترێك لەبەردەم پێگەی سڵاو هەڵبدات ئەندامانی تیپەكە بەپێی درێژییەكانیان ڕێكخرابوون ڕاهێنەرەكە بڕیاریدا یاریزانی ناوەڕاست كۆترەكە هەڵبدات. **بەپێی پێدراوەكانی ئەم خشتەیە كێ كۆترەكە هەڵدەدات؟**

ناو	ڕزگار	تۆما	مەحمود	ئارا	سرور	عبداللە	شێرزاد
درێژی (cm)	154	177	165	149	180	172	159

شیكار

پێویستە خشتەكە بەجۆرێك ڕێكبخەینەوە كە هاوتا بێت لەگەڵ ڕێكخستنی یاریزانەكان لە نمایشەكەدا یاریزانەكان بەپێی درێژی ڕێكخرابوون لە درێژترینییان تا كورتترین:

ناو	سرور	تۆما	عبداللە	مەحمود	شێرزاد	ڕزگار	ئارا
درێژی (cm)	180	177	172	165	159	154	149

مەحمود دەكەوێتە ناوەڕاست چونكە ژمارە ئەندامەكانی تیپەكە كە كەوتوونەتە پێشی یەكسانە بە ژمارەی ئەندامانی تیپەكە كەوتوونەتە دوای كەواتە مەحمود كۆترەكە هەڵدەدات.

لە نموونەی پێشوودا دەڵێین مەحموود **ناوەڕاستەی Median** تیپەکەیە.
بەشێوەیەکی گشتی ناوەڕاستەی کۆمەڵێك بەها ئەو بەهایەیە کە پاش ڕێکخستنی کۆمەڵەکە دەکات بە دوو بەشی یەکسان لەژمارەی دانەکاندا ئەگەر ژمارەی دانەکان تاك بێت ئەوا ناوەڕاستە بریتییە لەو بەهایەی کەوتووەتە ناوەڕاست ئەگەر ژمارەی دانەکان جووت بێت ئەوا ناوەڕاستە بریتییە لە ناوەندی ئەو دوو بەهایەی دەکەونە ناوەڕاست.

نموونە 7

نمرەکانی خوێندکارانی بۆلی دەیەم لە تاقیکردنەوەی بیرکاریدا بەم شێوەیە بوو:
77, 85, 35, 69, 82, 49, 66, 74, 57, 32, 65. ناوەڕاستەی ئەو نمرانە چییە؟

شیکار **32,35, 49, 57, 65, 66, 69, 74, 77, 82, 85**

بەرێکخستنی نمرەکان دەستپێدەکەین لە بچووکترینەوە بۆ گەورەترین ریزیان دەکەین لەبەرئەوەی ژمارەی بەهاکان تاکە کەواتە ناوەڕاستە ئەو بەهایەیە کە دەکەوێتە ناوەڕاست واتە بریتییە لە 66

بەرەنگاری

ئازاد هەستا بە دۆزینەوەی ناوەڕاستەی ئەم بەهایانە: 37، 21، 59، 43، 60 و 59 ی دەرهێنا ئایا ئەنجامەکەی ئازاد ڕاستە یان هەڵەیە؟ هەڵەکەی ئازاد ڕاقبکە ئەگەر هەیە.

باو (مۆد) Mode

پێڵاوفرۆشێك فرۆشتنەکانی لەمانگی ڕابردوو لەخشتەی پێوانەکاندا نووسی کە پێوانەی 41 زۆرتر فرۆشراوە بەوە دەڵێین باو بۆ کۆمەڵەی پێدراوەکان دەربارەی ئەو پێڵاوانەی کە فرۆشیارەکە لەمانگی ڕابردوودا فرۆشتوویەتی **باو Mode** بۆ کۆمەڵێك پێدراو بریتییە لەو پێدراوەی کە پتر لە

پێوانە	36	37	38	39	40	41	42	43	44
ژمارە	1	3	5	26	41	45	44	12	8

پێدراوەکانی تر دووبارە دەبێتەوە لەوانەیە کۆمەڵێك بەها باویان نەبێت هەروەها لەوانە لە باوێك پتریان هەبێت.

نموونە 8

دارا ڕاپرسییەکی لەنێوان خوێندکارانی پۆلەکەی ئەنجامدا دەربارەی ڕەنگی پەسندکراویان و ئەنجامەکەی لەم خشتەیەدا ڕێکخست: **ئایا باو بۆ ئەم کۆمەڵە پێدراوانە چییە؟**

ڕەنگ	سوور	زەرد	شین	سەوز	قاوەیی	ڕەش	سپی
ژمارە	8	3	10	8	10	6	1

شیکار

دەبینین هەردوو ڕەنگی شین و قاوەیی زیاتر پەسەندکراون لەلایەن خوێندکارانی پۆلەکەدا واتە دوو باو لەو کۆمەڵە پێدراوەدا هەیە بریتیین لە ڕەنگی شین و ڕەنگی قاوەیی.

نموونه 9

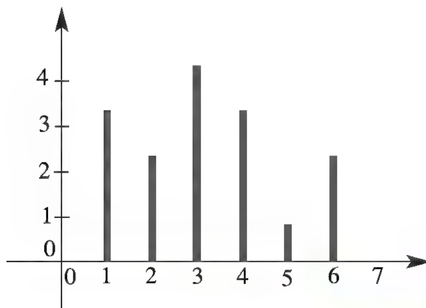
پلەی گەرمی لەهەفتەی یەکەمی مانگی شووبات لە هەولێر بەم شێوەیە بوو 3 ,1- ,0 ,2 ,2- ,4 ,6 **باوی ئەم بەهایانە چییە؟**

شیکار

باو بۆ ئەم پێدراوانە نییە، چونکە دووبارەبوونەوەی تێدا نییە.

بەرەنگاری

باو چییە لەم کۆمەڵە پێدراوەی بەم ستوونە ڕوونکردنەوەییانە نوێنراون؟



باو بۆ پێدراوە کۆکراوەکان Mode for grouped data

بە گەڕانەوە بۆ ئەو خشتەیەی بەڕێوەبەری خولی مامۆستایان لە دهۆک هەناردی

چەشنی تەمەن	[20, 25[	[25, 30[	[30, 35[	[35, 40[	[40, 45[	[45, 50[	[50, 55[	[55, 60[
ژمارەی مامۆستا	12	23	25	36	24	12	9	2

دەتوانین قسە دەربارەی چەشنی باو بکەین کە بە ئاسانترین شێوە بریتییە لەو چەشنەی گەورەترین دووبارەی هەیە، چەشنی باو بۆ تەمەنەکانی بەشداربووان بریتییە لە چەشنی [35, 40[.

نموونە 10

چەشنی باو بۆ ئەم پێدراوە خڕکراوانە چییە؟

چەشن	[8, 15[	[15, 22[	[22, 29[	[29, 36[	[36, 43[
ژمارە	2	8	4	5	1

شیکار

چەشنی باو بریتییە لە [15,22[**چونکە گەورەترین دووبارەی هەیە.**

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. کام پێوەر دیاریکردنی ئاسانترە: ناوەند یان ناوەڕاستە یان باو؟ کامیان دیاریکردنی قورسترە؟ ڕوونیبکەرەوە.
2. گریمان گەورەترین و بچووکترین بەهات لە کۆمەڵە بەهایەک لادا، ئایا ناوەڕاستە دەگۆڕێت؟ ئایا ناوەند دەگۆڕێت؟ ڕوونیبکەرەوە.
3. لەهەرسێ پێوەری، ناوەند و ناوەڕاستە و باو، کامەیان چاکتر ئەو نمرانە دەنوێنێت کە خوێندکارانی پۆلی دەیەم بەدەستیانهێناوە: 85، 83، 80، 88، 21، 79، 12، 90 ڕوونیبکەرەوە

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ناوەند و ناوەڕاستە و باو بۆ هەر کۆمەڵە پێدراوێک بدۆزەرەوە:

4 {55 ، 90، 83، 70، 65، 77، 50}

5 {8،7، 6، 6، 6، 4، 4، 2}

6 {26، 22، 18، 14، 10}

7 ژمارەی کاتژمێرەکانی ئیشکردنی دە کرێکار لە کارگەیەکدا بەم شێوەیە بوو: 36، 40، 34، 38، 33، 0، 40، 32، 35، 37.

أ ناوەند و ناوەڕاستە و باو، بۆ ئەم پێدراوانە بدۆزەوە.

ب کام لەم سێ پێوەرە بەچاکترین شێوە ژمارەی کاتژمێرەکانی ئیشکردنی نموونەیی دەنوێنێت؟ ڕوونبکەرەوە.

8 ناوەندی قورسکراو بۆ کرێی ڕۆژانە بدۆزەرەوە کە بەم خشتەیە نوێنراوە.

کرێ بە هەزاران دینار	5	6	7	8	9	10
ژمارەی کرێکاران	4	6	10	8	5	7

9 ناوەند و چەشنی باو بۆ ئەم پێدراوە کۆکراوانە بدۆزەرەوە.

چەشن	[30, 35[	[35, 40[	[40, 45[	[45, 50[	[50, 55[
ژمارە	6	3	10	7	4

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ناوەند و ناوەڕاستە و باو، بۆ هەر کۆمەڵە پێدراوێک بدۆزەوە.

10 { 20، 31، 45، 28، 7، 5، 12، 28}

11 { 78،32، 45، 10، 15، 13، 10، 32}

12 {17، 5، 10، 12، 7، 9، 5، 12، 4 }

13 {83، 44، 67، 39، 58، 63، 82، 76}

14 ژمارەی قوتابیانی نەهاتوو لە ڕۆژانی ڕابردوو بەم شێوەیە بوو: 1، 0، 3، 4، 1، 0، 2، 0، 3، 4، 1، 3، 4، 1، 2، 0، 1، 2، 0، 4، 3، 1، 2، 2، 2، 1، 3، 1، 1، 2 ئەم پێدراوانە لە خشتەیەکی دووبارە ڕێکبخە پاشان ناوەندی قورسکراو و ناوەڕاستە و باو بدۆزەرەوە.

15 ئەم پێدراوانە ژمارەی ئەو میلانە دەنوێنن کە هەندێک ئۆتۆمبێل بە گاڵۆنێک سوتەمەنی دەیبڕن: 30، 21، 18، 19، 23، 24، 26، 32، 30، 22، 12، 15، 21، 28، 27، 18، 16، 19، 23، 29، 24، 25، 16. ئەم پێدراوانە لە خشتەیەکی چەشنەکانی دووبارەبوونەوەی کۆکراوە، پاشان ناوەند و چەشنی باو بدۆزەرەوە.

16 ئامێرێك خواردنەوە تێدەكاتە ناو پەرداخ پێویستە 8 ئۆنسە بكاتە ناو هەر پەرداخێك، ئەو كۆمپانیایەی ئەو ئامێرە دروستدەكات بڕی تێكڕای 40 پەرداخی پێوا، كە بە ئامێرەكە تێكرابوون بۆ دڵنیابوون لە دروستی كاركردنی ئەم ئامێرە.
ئەنجامەكانی ئەم تاقیكردنەوەیە بەم شێوەیە بوو:

8.0	8.0	7.6	7.9	8.0	7.8	8.0	7.6	7.9	7.8
8.0	7.6	7.9	8.2	8.0	7.8	7.9	7.8	7.9	7.5
8.2	8.0	7.8	7.8	8.0	7.5	7.9	8.1	8.1	7.6
8.2	8.0	7.8	7.8	8.0	7.5	7.9	8.1	8.1	7.9

أ ناوەند و ناوەڕاستە و باو، بۆ ئەم پێدراوانە بدۆزەوە و هەرسێ پێوانە بەراوردبكە.
ب بەڕای تۆ وتەی كۆمپانیاكە كە ئامێرەكە نزیكەی 8 ئۆنس لەهەر پەرداخێك دەكات، ڕاستە؟

17 نمرەكانی سەردار لە تاقیكردنەوەكانی پێشوو بریتییە لە 86، 72، 85، 90 ناوەندی نمرەكانی تا ئێستا چەندە؟ كەمترین نمرە كە پێویستە لە تاقیكردنەوەی داهاتوویدا وەریبگرێت بۆ ئەوەی ناوەندی نوێی نمرەكانی لە 80 كەمتر نەبێت؟

18 خشتەی خوارەوە ڕێژەی سەدی دابەشكردنی هێزی كار نیشاندەدات بەپێی تەمەن لە یەكێك لە وڵاتەكاندا.

2005	1992	1979	تەمەن
16%	16%	24%	$[16, 25[$
21%	28%	27%	$[25, 35[$
25%	27%	19%	$[35, 45[$
24%	18%	16%	$[45, 55[$
14%	12%	14%	$[55, 65[$

أ خشتەیەك بۆ هەر ساڵێكدا ڕێكبخە.
ب ناوەندی تەمەنی هێزی كار لەهەر ساڵێك بدۆزەوە.
ج بەراورد لەنێوان هەرسێ ناوەند بكە، چ دەرەنجامێكت دەستدەكەوێت.

ڕوانین بۆ دواوە

19 زانا 3 جاری یەك لەدوای یەك پارچە دراوێكی كانزایی هەڵدا هێڵكارییەكی درەخت دروستبكە بۆ نیشاندانی ئەنجامە جۆراوجۆرەكانی لەتواناندایە ئەگەری دەركەوتنی هەمان ڕوو چییە لە هەرسێ جاردا؟

ڕوانین بۆ پێشەوە

20 زانا 3 جار یەك لەدوای یەك پارچە دراوێكی كانزایی هەڵدا، هێڵكارییەكی درەخت دروستبكە بۆ نیشاندانی ئەنجامە جۆراوجۆرەكانی لە تواندایە ئەگەری دەركەوتنی شێر دووجار چییە ئەگەر جاری یەكەم شێر دەركەوتبێت؟



پێوەرەکانی پەرتبوون

Measures of dispersion





بۆچی

دەتوانیت پێوەرەکانی پەرتبوون بەکاربهێنیت بۆ بەراوردکردن لە نێوان دوو کۆمەڵە پێدراو وەک هێندەکانی بارانی باریو لە دوو شاردا

ئامانجەکان

- پێوەرەکانی پەرتبوون وەک مەوداو لادانی ناوەندی و لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی و هەژمارەکات و بەکاریاندەهێنێت.

Concept of Dispersion | چەمکی پەرتبوون

جێبەجێکردنەکان

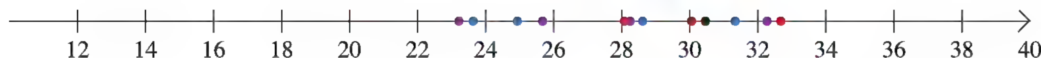
ئەو دوو خشتەی بەرامبەر ناوەندی پلەکانی گەرمی لە ماوەی 12 مانگ لە هەردوو شاری ریاز و جەددە پیشاندەدات. ناوەندی بەهاکانی خشتەی یەکەمی دەگاتە 27 لە کاتێکدا ناوەندی بەهاکانی خشتەی دووەم دەگاتە 28،51 ئەگەر بەهاکانی هەردوو نەخشە لەسەر ڕاستەهێڵی ژمارەکان بنوێنین دەبینین:

ناوەندی پلەکانی گەرمی شاری ریاز	
کانوونی دووەم	16.63
شوبات	17.8
ئادار	22.94
نیسان	26.37
ئایار	32.61
حوزەیران	35.62
تەموز	37.06
ئاب	36.81
ئەیلول	33.06
تشرینی یەکەم	28.34
تشرینی دووەم	22.5
کانونی یەکەم	14.35

ناوەندی پلەکانی گەرمی شاری جەددە	
کانوونی دووەم	23.32
شوبات	23.77
ئادار	25.8
نیسان	28.08
ئایار	30.51
حوزەیران	31.25
تەموز	32.7
ئاب	32.25
ئەیلول	31.27
تشرینی یەکەم	30.1
تشرینی دووەم	28.2
کانونی یەکەم	24.9



نواندنی پێدراوەکانی خشتەی یەکەم لەسەر ڕاستەهێڵی ژمارەکان



نواندنی پێدراوەکانی خشتەی دووەم لەسەر ڕاستەهێڵی ژمارەکان.

سەرنجبدە کە ناوەندی خشتەی دووەم (28.51) کۆمەڵەی بەهاکانی دەردەبڕێت چونکە بەهاکان لەناوەندە نزیکن بەڵام ناوەندی خشتەی یەکەم 27 کۆمەڵەی بەهاکان دەرنابڕێت تەنها یەکەمی نەبێت چونکە زۆربەی بەهاکان دوورن لە ناوەندەکە بۆیە دەڵێین کە کۆمەڵەی بەهاکانی خشتەی یەکەم پەرتترن لە بەهاکانی خشتەی دووەم.

پێوەرەکانی پەرتبوون Measures of Dispersion

ئامارناسان ژمارەیەك لە پێوەرەکان بەکاردێنن بۆ پێوانی مەودای پەرتبوونی کۆمەڵێك بەها.
مەودا **Range** مەودا بریتییە لە جیاوازی نێوان گەورەترین و بچووکترین بەها لە کۆمەڵەکەدا.

مەودا = گەورەترین بەها − بچووکترین بەها

بیری ڕەخنەگر

ئایا مەودا پەرتبوونی کۆمەڵێك بەها دەردەبڕێت؟

لادانی ناوەندی **Mean Deviation** : بریتییە لە ناوەندی لادانی یان دوورکەوتنەوەی بەهاکانی کۆمەڵێك لە ناوەندەکەیان بۆ هەژمێرکردنی لادانی ناوەندی کۆمەڵەیەك $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ لەبەها لادانی هەر یەکێکیان لەناوەند $\overline{x}$ هەژمێردەکەین، واتە $|x_1-\overline{x}|$ $|x_2-\overline{x}|$ ... $|x_n-\overline{x}|$ پاشان ناوەندی ئەم لادانانە هەژمێردەکەین.

$$\text{لادانی ناوەندی} = \frac{1}{n}\left(|x_1-\overline{x}|+|x_2-\overline{x}|+...+|x_n-\overline{x}|\right)$$

بیری ڕەخنەگر

بۆچی ئامار ناسەکان بڕی $|x_k-\overline{x}|$ بەکاردێنن بۆ هەژمارکردنی لادانی بەهای x_kی لەناوەندی $\overline{x}$و $x_k-\overline{x}$ بەکارناهێنن؟

نموونـــــه

1 یەکێك لە کۆمپانیاکانی بەرهەمهێنانی تایەی ئۆتۆمبێل 5 تاقیکردنەوەی لەسەر دوو جۆرە تایە کرد و ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی تۆمارکرد کە تایەکان کاریان کردووە پێش ئەوەی لەکارکەون خشتەی خوارەوە ئەنجامەکانی ئەم تاقیکردنەوانە نیشاندەدەن بە هەزاران کیلۆمەتر.

تایەی 1	66	43	37	50	54
تایەی 2	54	49	47	48	52

أ مەودا و لادانی ناوەندی بۆ ژمارەی کیلۆمەترەکانی هەرجۆرە تایەیەك هەژمێربکە.

ب ئەم پێوەرانە چی نیشاندەدەن دەربارەی هەرجۆرێك لە تایەکان، ڕاڤەی بکە.

شیکار

أ

تایەی 1

مەودا: $66 - 37 = 29$

واتە $29000\ km$ بۆ هەژمارکردنی لادانی ناوەندی، بە هەژمارکردنی ناوەند دەستپێکە:

$$\bar{x} = \frac{54 + 50 + 37 + 43 + 66}{5} = 50$$

پاشان لادانی هەر بەهایەك لەناوەندەکە هەژماربکە، بۆ ئەمە ئەم خشتەیە دروستبکە.

x_k	$\lvert\bar{x} - x_k\rvert$
66	16
43	7
37	13
50	0
54	4

پاشان ناوەندی لادانەکە هەژماربکە ئەمەت دەستدەکەوێت:

لادانی ناوەندی $= \frac{16+7+13+0+4}{5} = 8$

واتە $8000\ km$

تایەی 2

مەودا: $54 - 47 = 7$

واتە $7000\ km$ بۆ هەژمارکردنی لادانی ناوەندی بە هەژمارکردنی ناوەند دەستپێکە:

$$\bar{x} = \frac{52 + 48 + 47 + 49 + 54}{5} = 50$$

پاشان لادانی هەر بەهایەك لەناوەندەکە هەژماربکە، بۆ ئەمە ئەم خشتەیە دروستبکە.

x_k	$\lvert\bar{x} - x_k\rvert$
54	4
49	1
47	3
48	2
52	2

پاشان ناوەندی لادانەکە هەژماربکە ئەمەت دەستدەکەوێت:

لادانی ناوەندی $= \frac{4+1+3+2+2}{5} = 2.4$

واتە $2400\ km$

ب سەرنجبدە کە لادانی ناوەندی تایەی 2 کەمترە لەلادانی ناوەندی تایەی 1، ئەمەش ڕێگات پێدەدات بڵێیت کە ناوەندی پێدراوەکانی تایەی 2 بە متمانەترە بەم جۆرە خەملاندنی ئەو دوورییەی تایەی 2 دەیبڕێت پێش لەکارکەوتن بە متمانەترە.

هەوڵبدە مەودا و لادانی ناوەندی پێدراوەکانی تایەی 3 هەژماربکە بەراوردییبکە لەگەڵ بۆشایی پێوەرەکانی هەردوو تایەی پێشوو.

تایەی 3	64	52	50	49	35

خاڵی چاودێری

ئایا دەبێ دوو کۆمەڵە پێدراو هەمان مەودا و هەمان لادانی ناوەندییان هەبێت؟
هۆی وەڵامەکەت بە هێنانەوەی نموونەیەک بێت.
لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی: بریتین لەدوو پێوەری پەرتبوون بۆ بەراوردکردنی پێدراوەکان و شیکردنەوەیان بەکاردێن.

لێکنەچوون Variance $\sigma^2=\frac{1}{n}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2\right)$

لادانی پێوانەیی Stantard Deviation $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$

نموونە 2

لادانی پێوانەیی دوورییەکانی دوو تایەی نموونەی پێشوو بدۆزەوە:

شیکار

تایەی 1

خشتەی خوارەوە دروست بکە بۆ رێکخستنی ئەوەی هەژماری دەکەیت:

$\bar{x}=\frac{54+50+37+43+66}{5}=50$

x_k	$(x_k-\bar{x})$	$(x_k-\bar{x})^2$
66	16	256
43	-7	49
37	-13	169
50	0	0
54	4	16
سەرجەم	0	490

لێکنەچوون: $\sigma^2=\frac{490}{5}=98$

لادانی پێوانەیی: $\sigma=9.9$ بەواتای 9900km

تایەی 2

خشتەی خوارەوە دروست بکە بۆ رێکخستنی ئەوەی هەژماری دەکەیت:

$\bar{x}=\frac{52+48+47+49+54}{5}=50$

x_k	$x_k-\bar{x}$	$(x_k-\bar{x})^2$
54	4	16
49	-1	1
47	-3	9
48	-2	4
52	2	4
سەرجەم	0	34

لێکنەچوون: $\sigma^2=\frac{34}{5}=6.8$

لادانی پێوانەیی: $\sigma=2.6$ بەواتای 2600km

ئەم ئەنجامانە جەخت لەو دەرەنجامانە دەکاتەوە کە لە نموونەی پێشوو پێگەیشتین وتێیدا لادانی پیوانەیی تایەی 2 کەمترە لە لادانی پێوانەی تایەی 1.

هەوڵبدە لادانی پێوانەیی تایەی 3 چەندە؟

خاڵی چاودێری

ئەگەر لادانی پێوانەیی تایەی چوارەم بریتی بێت لە 1500 km ئایا دەتوانیت چی بڵێیت دەربارەی ئەم تایەیە بەگوێرەی هەردوو تایەی 1 و 2.

بیری ڕەخنەگر بە بۆچوونی تۆ کام پێوەر پتر بەکاردێت: لێکنەچوون یان لادانی پێوانەیی؟ بۆچی؟ بەگەڕانەوە بۆ تێکڕاکانی پلەکانی گەرمی لەهەردوو شاری ریاز و جەددە، خشتەی خوارەوە پێوەرەکانی پەرتبوونی تێکڕاکانی پلەکانی گەرمی لەم دوو شارە نیشاندەدات.

پێوەر	ریاز	جەددە
مەودا	22.71	9.38
لادانی ناوەندی	6.91	2.83
لێکنەچوون	60.92	10.27
لادانی پێوانەیی	7.81	3.20



بەم جۆرە دەبینین کە پەرتبوونی تێکڕاکانی پلەی گەرمی لە جەددە کەمترە لەوەی لە ریاز، چونکە لادانی پێوانەیی بۆ شاری یەکەم کەمترە لە لادانی پێوانەیی بۆ شاری دووەم.

ڕاهێنـــــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. ڕاڤەبکە بۆچی هەریەك لەلادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی ژمارەیەکی سالب نین؟
2. پەیوەندی نێوان لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی ڕاڤەبکە ئایا لادانی پێوانەیی بەردەوام لە لێکنەچوون کەمترە؟
3. ڕاڤەبکە بۆچی هەریەك لە لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی پەرتبوون دەردەبڕێت زیاتر لەمەودا؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

جێبەجێکردنەکان

4. پەروەردە و فێرکردن خشتەی بەرامبەر نمرەکانی دوو خوێندکار لە 5 تاقیکردنەوەدا نیشاندەدات، مەودا و لادانی ناوەندی نمرەکانی هەریەك لە دوو خوێندکارەکە هەژماربکە و ئاماژکاری ئەم پێوەرانە ڕاڤەبکە.
5. لادانی پێوانەیی نمرەکانی هەریەك لەدوو خوێندکارەکە بدۆزەوە.

هێمن	هاوار
81	98
84	68
88	99
82	59
85	96

ڕاهێنان و جێبەجێكردن

مەودا و لادانی ناوەندی بدۆزەوە.

6 8؛ 10؛ 3؛ 9؛ 10

7 1؛ 2؛ 4؛ 2؛ 6

8 31؛ 103؛ 34؛ 98؛ 107؛ 32

9 32؛ 23؛ 68؛ 74؛ 26؛ 93

10 32؛ 23؛ 68؛ 74؛ 26؛ 93

11 11.1؛ 14.2؛ 8.4؛ 12.2؛ 15.2؛ 10.9

12 -1.22؛ 4.53؛ -2.42؛ 2.33؛ 4,66

13 8.72؛ 7.43 ؛ -2.92؛ -3.56؛ 5.78

لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی بدۆزەوە

14 9؛ 10؛ 10؛ 8؛ 7؛ 11؛ 12؛ 9

15 8.1؛ 10.3؛ 3.4؛ 9.8؛ 10.7

16 -3؛ 2؛ -5؛ 4؛ -2؛ 8؛ 9؛ -1

17 2؛ 4؛ -8؛ 8؛ 7؛ -2؛ -4؛ 3؛ 7

لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی بدۆزەوە كام لەم دوو پێوەرە كاریگەری بەهای پەرگی كەمتر بەسەرەوە دیاردەكەوێت؟

18 20؛ 30؛ 40؛ 500

19 0؛ 500؛ 510؛ 520

20 دوو كۆمەڵە بەها بنووسە هەمان مەودایان هەبێت لە كاتێكدا لادانە پێوانەییەكانیان جیاوازبێت.

بەرەنگاری

21 ئایا دەبێت لادانی پێوانەیی كۆمەڵە بەهایەك یەكسان بێت بە سفر؟ ئەگەر ئەوە ببێت، مەرجەكانی هاتنەدی ئەم بارە دیاربكە نموونەیەك لە ڕاڤەكردنت بەكاربێنە.

بەستنەوە

22 ڕاپرسی داوا لە 30 كەس كرا بۆچوونیان دەربارەی جۆرێك ساردەمەنی دەرببڕن لە ڕێگای دانانی نمرە لە 1 تا 10 مەودا و لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی ئەنجامەكانی ڕاپرسییەكە كە لە خشتەی بەرامبەردا پیشاندراوە بدۆزەوە.

10	8	6	9	7	5
8	7	9	8	8	7
8	6	9	7	8	10
10	10	8	9	10	8
9	7	7	8	9	7

جێبەجێكردنەكان

وەرزش خشتەی خوارەوە ژمارە پێوانەییەكان (بە خولەك و چركە و بەشەكان لەسەدی چركە) پیشاندەدات بۆ پیاوان و ئافرەتان لە خلیسكێنی سەر سەهۆڵ، لە ژمارەیەك لە خولەكانی یارییەكانی ئۆلۆمپی:

	1976	1980	1984	1988	1992	1994	1998
پیاوان	1:59.38	1:55.44	1:58.36	1:52.06	1:54.81	1:51.29	1:47.87
ئافرەتان	2:16.58	2:10.95	2:03.42	2:00.68	2:05.87	2:02.19	1:57.58



23 ناوەندو ناوەڕاستەی ژمارە پێوانەییەکانی پیاوان و ئافرەتان بدۆزەوە.

24 مەودا و لادانی ناوەندی پیاوان و ئافرەتان هەژمێربکە ئەم پێوەرانە چیمان پێ ڕادەگەیەنن دەربارەی ژمارە پێوانەییەکانی پیاوان و ئافرەتان؟

25 لادانی پێوانەیی پیاوان و ئافرەتان هەژمێربکە. ئەم پێوەرانە چیمان پێ ڕادەگەیەنن دەربارەی ژمارە پێوانەییەکانی پیاوان و ئافرەتان؟

ڕوانین بۆ دواوە

بدۆزەوە.

26 C_3^8 27 C_3^{10} 28 P_3^{17} 29 P_3^{21}

ڕوانین بۆ پێشەوە

30 زۆر جار ئامار ناسەکان پەنا دەبەنە بەر بەکارهێنانی نموونەیەك بۆ ئەنجامدانی توێژینەوە لەسەر کۆمەڵەیەکی گەورە لە بەهاء، و پشت بە پێوەرە ئامارییەکانی نموونەکەوە دەبەستن بۆ خەملاندنی پێوەرە ئامارییەکانی کۆمەڵەکە بەگشتی چونکە ئەوان ناوەندی نموونەکە بە دەربڕی ناوەندی کۆمەڵەکە دەزانن لەکاتێکدا بۆ هەژمێرکردنی لادانی پێوانەیی لێکنەچوونی نموونەکە بە یاسایەك هەژمێردەکەن کە تۆزێك جیایە لە هەژمێرکردنی لێکنەچوون لە کۆمەڵەکە بەتەواوەتی ئەوان ئم یاسایە بەکاردێنن:

لێکنەچوونی نموونەکە: $\sigma^2 = \frac{1}{(n-1)}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2\right)$

أ لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی ئەم نموونەیە بدۆزەوە: 15؛ 18؛ 7؛ 16؛ 5؛ 12.

ب بۆ دۆزینەوەی ناوەندی ژمارەی ئۆتۆمبێلەکان لەیەك خێزاندا ئەنجومەنی شارەوانی یەکێك لەشارەکان نموونەیەکی وەرگرت لە 10 خێزان کە بەشێوەیەکی هەڕەمەکی هەڵبژێردران ڕاپرسی ئەم نموونەیە ئەم ژمارانەی لێدەرچوو: 2؛ 3؛ 2؛ 1؛ 1؛ 4؛ 2؛ 1؛ 3؛ 4. ناوەندی ژمارەی ئوتومبیلەکان لەیەك خێزاندا بخەملێنەو لادانی پێوانەیی بخەملێنە.

سێگۆشەزانی Trigonometry

بەشی

5

سێگۆشەزانی زانستێکی کۆن و نوێیە، لەو پەیوەندییە گرنگە دەکۆڵێتەوە کە لە نێوان لایەکانی سێگۆشە و گۆشەکانی هەیە، لە کۆنەوە مرۆڤ گرنگی بە سێگۆشەزانی داوە، هەروەك لەم وێنەی خوارەوە دەردەکەوێت. جێبەجێکردنەکانی سێگۆشەزانی گەلێك فراوانە لە فیزیا و گەردوونزانی و تەلارسازی و ئەندازە و ئەوانی تر.

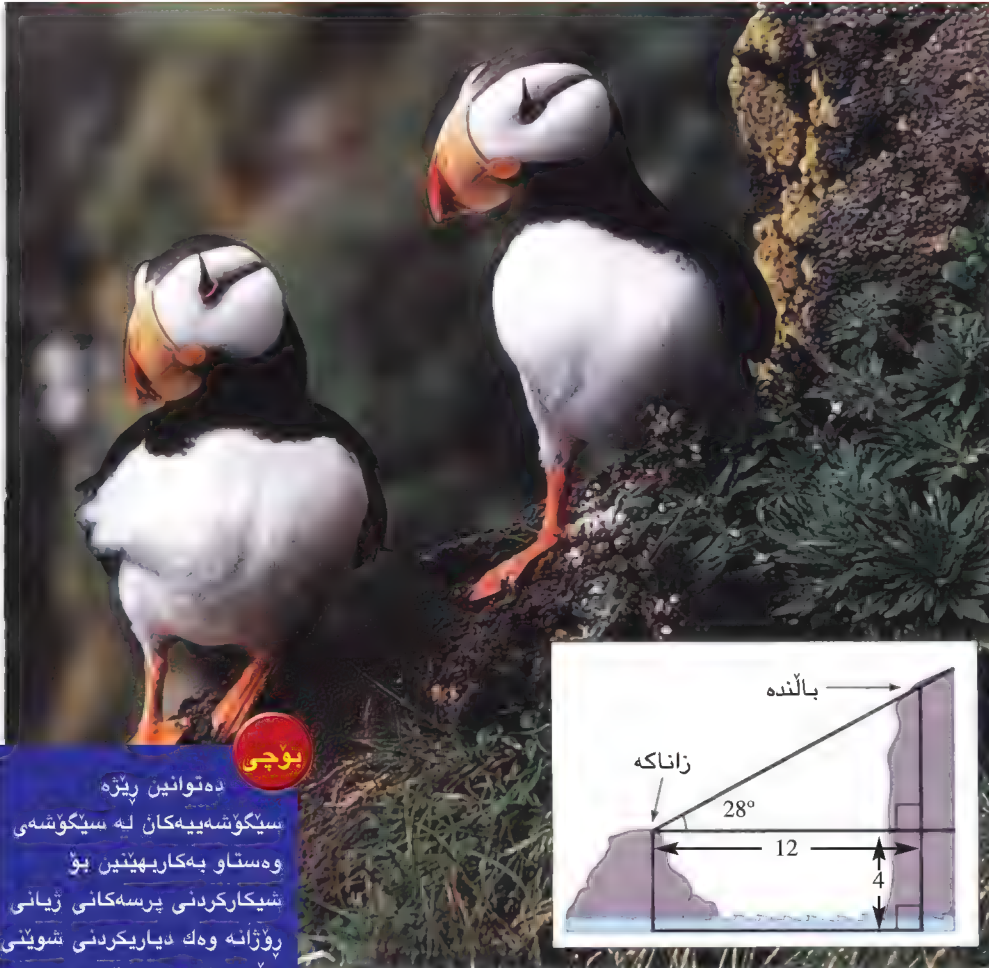
وانەکان

1. ڕێژە سێگۆشەییەکان و شیکارکردنی سێگۆشەی وەستاو.

وانەی 1

ڕێژە سێگۆشەییەکان وشیکارکردنی سێگۆشەی وەستاو

Trigonametric Ratios and Solving Right Triangle



بۆچی

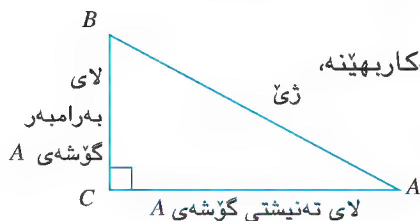
دەتوانین ڕێژە سێگۆشەییەکان لە سێگۆشەی وەستاو بەکاربهێنین بۆ شیکارکردنی پرسەکانی ژیانی ڕۆژانە وەك دیاریکردنی شوێنی باڵندەکانی ئەو وێنەیە لەسەر ڕووی ئاو

ئامانجەکان

- ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەیەکی تیژ دەناسێت و جیادەکاتەوە.
- سێگۆشەیەکی وەستاو و بە بەکارهێنانی ڕێژە سێگۆشەییەکان شیکار دەکات.

جێبەجێکردنەکان
باڵندەکان

زانایەك هەڵدەستێت بە وێنەگرتنی کۆمەڵە باڵندەیەك کە لە قەد پاڵی شاخێکدا وەستابوون، بە مەبەستی هەژمارکردنی بەرزی ئەو باڵندانە لەسەر ڕووی ئاو. زاناکە ئەو گۆشەی پێوا کە دروست دەبێت لە نێوان هێڵی بینین بۆ باڵندەکان و هێڵی ئاسۆیی و بینی 28°یە. چۆن زانایەکە بەرزی باڵندەکان لەسەر ڕووی ئاو هەژمار دەکات؟ ئەگەر زانیت لەبەرزی 4 مەتر وەستاوە و دووری نێوان زاناکە و قەدپاڵی شاخەکە 12 مەتربێت.



بۆ هەژمارکردنی بەرزی شوێنی باڵندەکان، سێگۆشەزانی بەکاربهێنە،

دەتوانیت سێگۆشەزانی بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەیەك لە گۆشەکانی سێگۆشەیەکی وەستاو، یان درێژی لایەك لە لایەکانی سێگۆشەکە لەبیر نەکەی

ژێی سێگۆشە بریتییە لە لای بەرامبەری گۆشەی وەستاو لەم سێگۆشەیە لای $\overline{AB}$ ژێ یە **Hypotenuse** و $\overline{AC}$ لای تەنیشتی **Adjacent** گۆشەی A یە و $\overline{BC}$ لای بەرامبەرییەتی **Opposite**.

خاڵی چاودێری ✓

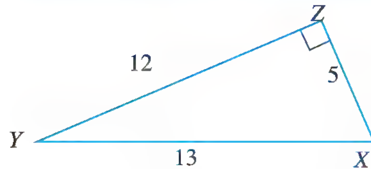
لای تەنیشت و لای بەرامبەری گۆشەی B دیارییکە.

Trigonometric Ratios of $\hat{A}$ — ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی $\hat{A}$

پێناسە	$\sin A = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{ژێ}}$	$\cos A = \frac{\text{تەنیشت}}{\text{ژێ}}$	$\tan A = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{تەنیشت}}$
نووسین	$\sin A = \frac{BC}{AB}$	$\cos A = \frac{AC}{AB}$	$\tan A = \frac{BC}{AC}$

نموونــــــە 1

هەرسێ ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەی X لە سێگۆشەی بەرامبەر هەژماربکە با وەڵامەکە بە تەواوی بێت و هەندێ وەڵام بە نزیککردنەوە بۆ نزیکترین بەشی دە هەزاری بێت.



شیکار

$\sin X = \frac{12}{13} \approx 0.923$

$\cos X = \frac{5}{13} \approx 0.3846$

$\tan X = \frac{12}{5} = 2.4$

هەوڵبدە هەرسێ ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەی Y لە سێگۆشەکەی سەرەوە هەژماربکە، با وەڵامەکەت بە تەواوی بێت و هەندێ وەڵام و بە نزیککردنەوە بۆ نزیکترین بەشی دەهەزاری بێت.

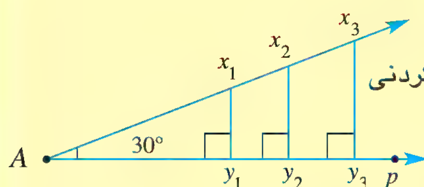
چالاکی

Exploring Trigonometric Ratios — دۆزینەوەی ڕێژە سێگۆشەییەکان

پێویستیت بە پرگالێك و ڕاستەیەکی سانتیمەتری و بژمێرێك هەیە.

خشتەیەکی وەك خشتەکەی خوارەوە دروستبکە.

1. ئەوەی لە خشتەکەدا هاتووە بینووسەوە، لە دوایدا تەواوی بکە بە پێوانی لایە دیاریکراوەکان و هەژمارکردنی ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی A.



2. ئایا ئەو بەهایانەی نوسیوە لە ستونی $\sin A$ بەنزیکەیی یەکسانن؟ لە ستوونی $\cos A$ چی؟ لە ستونی $\tan A$ چی؟

سێگۆشە	بەرامبەر $\hat{A}$	تەنیشت $\hat{A}$	ژێ	$\sin A = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{ژێ}}$	$\cos A = \frac{\text{تەنیشت}}{\text{ژێ}}$	$\tan A = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{تەنیشت}}$
Ax_1y_1						
Ax_2y_2						
Ax_3y_3						

3. ئەو ئەنجامانەی دەستتکەوتووە بەراوردیبکە لەگەڵ ئەنجامەکانی هاوڕێکانت لە پۆلەکەتدا.

4. ئایا دەتوانیت گریمانەیەك دابڕێژیت دەربارەی هەرسێ ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی A.

خاڵی چاودێری ✔

بەهای رێژە سێگۆشەیی گۆشەیەکی تیژ ناگۆڕێت بە گۆڕانی ئەو سێگۆشە وەستاوەی کە بەکارهاتووە بۆ هەژمارکردنی هەروەك لە چالاکی سەرەوە بۆت دەرکەوت، بەهای ئەو رێژانە تەنها بە پێوانەکردنی گۆشەکە دەبێت. دەتوانی بەهای رێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەیەکی پێوانە زانراو بەدەست بهێنێت، بە بەکارهێنانی بژمێری زانستی و دەتوانیت رێژە سێگۆشەییەکان بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی هەندێك لەلایەکانی سێگۆشەی وەستاو وەك لە نموونەی 2 دەردەکەوێت.

نموونە 2

درێژی لاکانی سێگۆشەی بەرامبەر هەژماربکە.

شیکار

لەبەرئەوەی درێژی $\overline{AC}$ زانراوە پێویستە درێژی هەریەك لە $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ بدۆزەوە.

بەکاربهێنە $\cos A$ بۆ دۆزینەوەی درێژی $\overline{AB}$.

بەکاربهێنە $\tan A$ بۆ دۆزینەوەی درێژی $\overline{BC}$.

$$\cos A = \frac{AC}{AB} \qquad \tan A = \frac{BC}{AC}$$

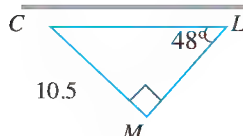
$$\cos 41^\circ = \frac{7.4}{AB} \qquad \tan 41^\circ = \frac{BC}{7.4}$$

$$AB = \frac{7.4}{cos 41^\circ} \qquad BC = 7.4 \times \tan 41^\circ$$

$$BC \approx 7.4 \times 0.8693$$

$$AB \approx \frac{7.4}{0.7547} \approx 9.8 \qquad BC \approx 6.4$$

هەوڵبدە درێژی لایەکانی سێگۆشەی بەرامبەر هەژماربکە.



بەرزە گۆشە **Angle of Elevation** ئەو گۆشەیە کە هێڵی ئاسۆیی پێکدەهێنێت لەگەڵ هێڵی بینینی خاڵێك لەخوی بەرزتربێت.

نزمە گۆشە **Angle of Depression** ئەو گۆشەیە کە هێڵی ئاسۆیی پێکدەهێنێت لەگەڵ هێڵی بینینی خاڵێك لە خوی نزمتربێت.

سەرنجبدە پێوانەی بەرزە گۆشە یەکسانە بە پێوانەی نزمە گۆشە.

نموونە 3

بەگەڕانەوە بۆ پرسیاری باسکراو لە سەرەتای وانەکە، بەرزی شوێنی باڵندەکان لەسەر رووی ئاوەکە هەژماربکە.

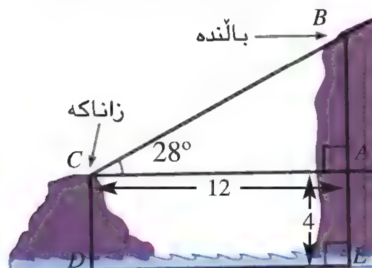
جێبەجێکردنەکان

باڵندەکان

شیکار

$BE = BA + AE$

درێژی پارچە راستەهێڵی BE بەرزی شوێنی باڵندەکان دەنوێنێت لەڕووی ئاوەکە. لەبەرئەوەی هەروەها $AE=CD=4$ ئەوا پێویستە هەژماری AB بکەیت.



$$\tan 28^\circ = \frac{AB}{12}$$

$$AB = 12 \times \tan 28^\circ$$

$$AB \approx 6.38$$

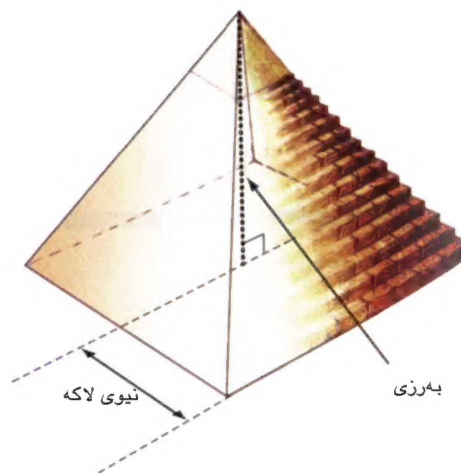
$$BE = BA + AE \approx 6.38 + 4 \approx 10.3$$

بەرزی باڵندەکان لەسەر رووی ئاو= 10.38 m بەنزیکەیی

دەتوانیت بژمێرەی زانستی بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەیەك،
ئەگەر یەکێك لە ڕێژە سێگۆشەییەکانی زانراو بێت، بە بەکارهێنانی دوگمەکانی

TAN^{-1} COS^{-1} SIN^{-1}

ئەگەر $\tan A = \frac{4}{3}$ ئەوا پێوانەی گۆشەی A بریتییە لە $\tan^{-1}\frac{4}{3} \approx 56°$.



دەروازەیەك لەسەر ڕوشەنبیری فیرعەونییەکان

فیرعەونییەکان پەیوەندییەکی سێگۆشەییان بەکارهێناوە و ناویان ناوە سیکد
کە لاری ڕووی هەرەمەکەی دەنواند.

$$1 \text{ سیکد} = \frac{\text{نیوەی پێوانەی لایەکی بنکەی هەرەمەکە» بەبست»}}{\text{بەرزی هەرەمەکە بەکیوبت«کیوبت= 7 بست»}}$$

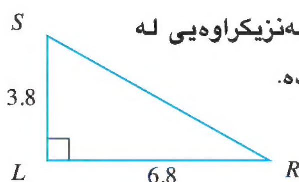
سەرنجبدە کە سیکد هەڵگەڕاوەی tan گۆشەیە کە پێی دەوترێت Cotangent یان
بە کورتی cot ی گۆشەکە.



بۆ ئەوەی سێگۆشەیەکی وەستاو شیکاربکەیت **Solve a Right Triangle** واتا پێوانەی گۆشەکانی سێگۆشەکە و درێژی لایە نەزانراوەکانی سێگۆشەکە هەژماربکەیت بژمێری زانستی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی پێوانەی ئەو گۆشەی کە یەکێك لە ڕێژە سێگۆشەییەکانی دەزانیت ئەو ڕاستییە بەکاربهێنە کە کۆی گۆشەکانی ناوەوەی سێگۆشە دەکاتە°180 واتە کۆی هەردوو گۆشە تیژەکە لە سێگۆشە وەستاوەکە دەکاتە°90 .

نموونە 4

سێگۆشەی بەرامبەر شیکاربکە بە هەژمارکردنی پێوانەی گۆشەکانی بەنزیکراوەیی لە نزیکترین پلە و درێژی ژێیەکەی نزیکبکەیتەوە بۆ نزیکترین بەش لە دە.



شیکار

1. $\tan R = \frac{3.8}{6.8}$

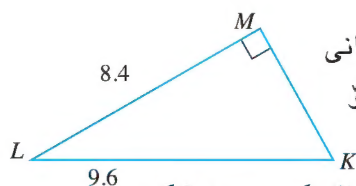
$R = \tan^{-1}\frac{3.8}{6.8} \approx 29°$

2. لەبەرئەوەی کۆی پێوانەی دووگۆشە تیژەکە دەکاتە °90 پێوانەی گۆشەی S بریتییە لە $90° - 29 = 61°$ بە نزیکەیی.

3. بیردۆزی فیتاگۆرس بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی درێژی ژێیەکە.

$$(RS)^2 = (6.8)^2 + (3.8)^2$$
$$RS = \sqrt{(6.8)^2 + (3.8)^2}$$
$$RS \approx 7.8$$

هەوڵبدە سێگۆشەی بەرامبەر شیکاربکە بە هەژمارکرنی پێوانەی گۆشەکانی بە نزیککراوەیی لە نزیکترین پلە و درێژی ژێیەکەی نزیکبکەوە بۆ نزیکترین بەش لە دە.

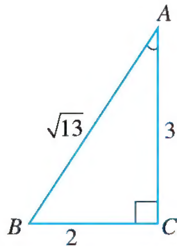


بیری ڕەخنەگر

1. چۆن سێگۆشەی نموونەی 4 شیکاردەکەیت بە هەژمارکردنی ژێیەکەی دەستپێبکە، پاشان sin یان cos بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی پێوانەی گۆشەکانی؟
2. لەدوای هەژمارکردنی پێوانەی $\hat{R}$ ئایا دەتوانی درێژی ژێیەکە هەژماربکەیت بێ بەکارهێنانی بیردۆزی فیتاگۆرس؟

ڕاهێــــــنــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

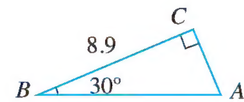


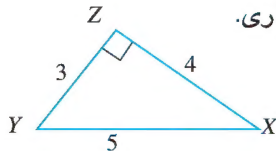
1 چۆن ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی A لە سێگۆشەی بەرامبەر هەژماردەکەیت.

2 چۆن پێوانەی دوو گۆشەی A و B لەسێگۆشەی بەرامبەر دەدۆزیتەوە.

3 جیاوازی چییە لە نێوان A $\sin^{-1}$ ، $\frac{1}{\sin A}$؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

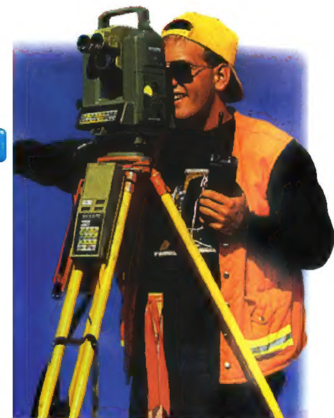


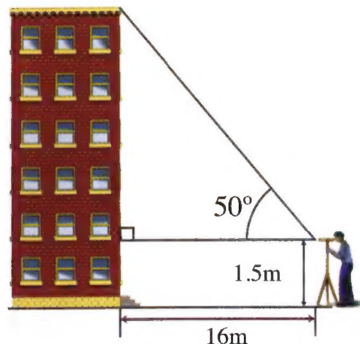


4 ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی X هەژماربکە لەسێگۆشەی لای چەپ، با وەڵامەکانت تەواو بن و نزیکبکرێنەوە بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزاری.

5 درێژی هەردوو لای $\overline{AC}$، $\overline{BA}$ لە سێگۆشەی لای ڕاست هەژماربکە.

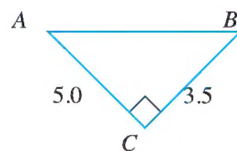
جێبەجێکردن





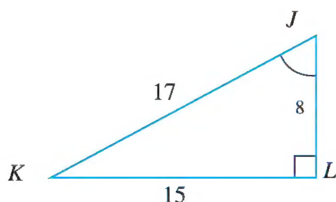
6 ئەندازە ئەندازیارێك لە دووری 16 m لە تەلارێك وەستاوە، بە دووربینێك کە لە بەرزی 1.5m لەزەوییەوە دانرابوو سەیری بەرزترین خاڵی تەلارەکەی دەکرد ئەگەر پێوانەی بەرزە گۆشەکە 50° بێت بەرزی تەلارەکە چەندە؟

7 ئەم سێگۆشەیەی خوارەوە شیکاربکە پێوانەی گۆشەی A هەژماربکە بە نزیککراوەیی بۆ نزیکترین پلە و درێژی لای AB بە نزیککراوەیی بۆ نزیکترین بەش لە دە.



ڕاهێنان و جێبەجێکردن

سێگۆشەی JKL بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی بەهای داواکراو وەڵامەکەت بە تەواوی بدەوە پاشان بۆ نزیکترین بەش لە دە هەزاری نزیکیبکەوە.

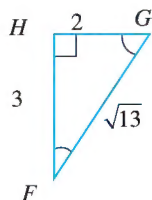


8 $\sin K$ **9** $\sin J$

10 $\cos J$ **11** $\cos K$

12 $\tan K$ **13** $\tan J$

سێگۆشەی $F\,G\,H$ بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی بەهای داواکراو وەڵامەکەت بە تەواوی بدەوە پاشان بۆ نزیکترین بەش لە دە هەزاری نزیکیبکەوە.



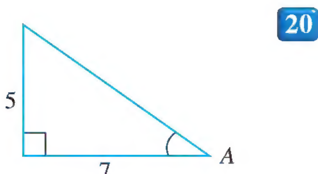
14 $\sin G$ 15 $\sin F$

16 $\cos G$ 17 $\cos F$

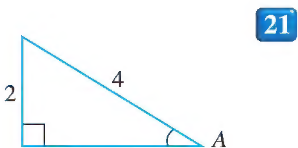
18 $\tan G$ 19 $\tan F$

پێوانەی گۆشەی A هەژماربکە بە بەکارهێنانی بژمێر.

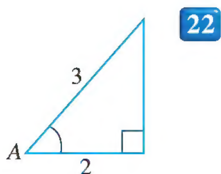
20



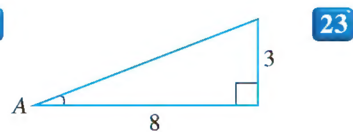
21



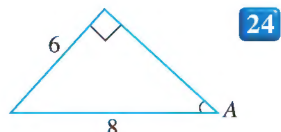
22



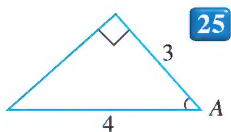
23



24

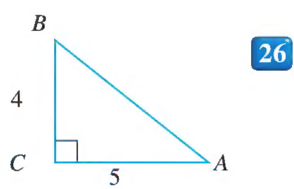


25

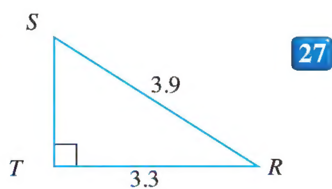


ئەم سێگۆشانە شیکاربکە پێوانەی گۆشەکانیان هەژماربکە بە نزیکراوەیی لە نزیکترین پلە و درێژی لایەکانییان بۆ نزیکترین بەش لە دەیەك نزیكبكەوە.

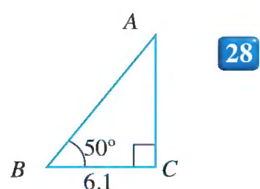
26



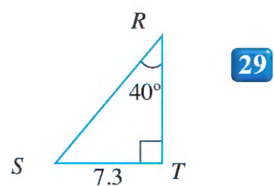
27



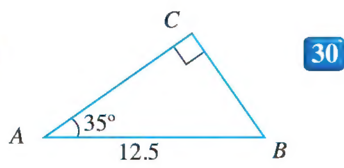
28



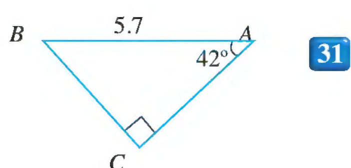
29



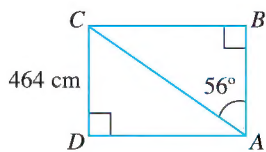
30



31



32 بیسەلمێنە کە پەیوەندی $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ هەمیشە ڕاستە.



33 **ئەندازە** درێژی هەریەك لە لای AD و تیرە AC لە لاكێشەی بەرامبەر هەژماربكە.

جێبەجێكردنەكان

34 **جوانكاری ماڵەكان** باوكی ژیكەڵە ئارەزوو دەكات باڵەكۆنێك دروستبكات لەشێوەی سێگۆشەی وەستاو كەژێی سێگۆشەكە 6 مەتر بێت و دوولای سێگۆشە وەستاوەكە لە درێژیدا یەكسان بن.

أ درێژی هەریەكە لە دوو لای گۆشە وەستاوەكە هەژماربكە.

ب ڕووبەری باڵەكۆنەكە هەژماربكە.

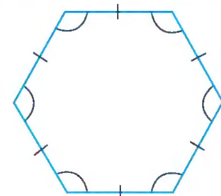
فڕۆكەوانی **فڕۆكەیەك لە بەرزی 6.5 km دەفڕێت. بە مەبەستی نیشتنەوەیەكی ئارام، كاپتنەكە بڕیاریدا دەستبەجێ دەست بە نیشتنەوە بكرێت.**

35 پێوانەی ئەو گۆشەیە هەژماربكە كە هێڵی نیشتنەوە پێكدەهێنێت لەگەڵ هێڵی ئاسۆ، ئەگەر زانیت فڕۆكەوانەكە دەستی بە نیشتنەوە كرد لەدووری 186 km لە فڕۆكەخانەكە (پێوانەكە لە زەوییەوە پێوراوە)



36 لەدووری چەند لە فڕۆكەخانەكەوە پێویستە فڕۆكەوانەكە دەست بە نیشتنەوە بكات، ئەگەر پێوانەی گۆشەی نێوان هێڵی نیشتنەوە و هێڵی ئاسۆی 5^{o} هەڵبژارد؟

بەرەنگاری



37 **بیناكردن** بەڕێوەبەری باخچەیەكی گشتی ئارەزوی دروستكردنی شوێنێكی حەسانەوەی كرد، بنكەكەی بە شێوەی شەشلایەكی ڕێك بێت، درێژی لایەكی 10 مەتر بێت. كاشی كردن بنكەكەی 17 هەزار دیناری تێدەچێت بۆهەر مەتر دووجایەك. ڕێژە سێگۆشەییەكان بەكاربهێنە بۆ هەژماركردنی تێچوونی كاشیكردنەوەی.

ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە، پاش ڕێژەكردنی ژێرە

38 $\frac{3}{\sqrt{2}}$ 39 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 40 $\frac{5}{1-\sqrt{2}}$ 41 $\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

ناوەندی هەر كۆمەڵە بەهایەك هەژماربكە، پاشان لادانی پێوانەیی هەژماربكە.

42 12، 34، 18، 25، 53، 46، 17، 14، 25، 36، 24، 19، 17، 28، 26، 22

43 102، 107، 122، 99، 103، 121، 113، 100، 78، 130، 125، 119، 110

ڕوانین بۆ پێشەوە

44 **ئەندازە** ئەگەر خاڵێك بە دەوری چەقی سووڕانەوەكەیدا بسوڕێتەوە، ئەندازگەكەی بازنەیەكی تەواوە، ئەو گۆشەیە چەندە ئەندازگەكەی نیوە بازنەبێت؟ چارەكە بازنەبێت؟